



## Международный флешмоб по математике

### «Задача дня»

7+ класс

#### ПОИСК КОРАБЛЯ

На клетчатом поле размером  $5 \times 5$  (см. рисунок 1) расположен корабль размером  $2 \times 2$ . Около строки или столбца можно установить детектор, который загорается, если в соответствующей строке или столбце есть клетки, закрытые кораблем. Какое наименьшее количество детекторов нужно установить, чтобы по их показаниям можно было однозначно определить местоположение корабля? (Все установленные детекторы загораются одновременно, то есть выбирать местоположение следующего детектора, основываясь на показаниях предыдущего, нельзя.)

1) Расставь как можно меньше детекторов.  
Сколько их у тебя получилось?

В своём примере выдели те вертикали и горизонтали, около которых стоят детекторы.

2) Докажи, что меньше детекторов расставить нельзя.

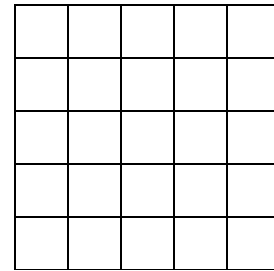


Рис. 1. «Доска  $5 \times 5$ »

#### РАЗБОР ЗАДАНИЯ

Хватит четырёх детекторов. Приведём пример их возможного расположения и докажем, что меньшим числом детекторов обойтись не удастся.

**Внимание!** Ход рассуждений ученика может отличаться от изложенного ниже.

Выделим несколько частей (этапов) решения задачи:

Часть 1. Выделение элементарных условий и требований задачи.

Часть 2. Анализ условия задачи.

Часть 3. Пример расположения детекторов.

Часть 4. Оценка (доказательство того, что меньшим количеством детекторов обойтись не получится).

Рассмотрим выполнение каждой части решения.

**Часть 1. Выделим элементарные условия и требования задачи.** (При решении задачи методом ролей эти действия выполняет **Фотограф**.)

Элементарные условия задачи.

1) Дано клетчатое поле размерами  $5 \times 5$ .

- 2) Дан корабль размерами  $2 \times 2$ , который расположен на этом поле, но точное местоположение корабля не известно.
- 3) Около некоторых строк и столбцов можно поставить детекторы.
- 4) Детектор показывает, есть ли в данной строке (данном столбце) клетки, занятые кораблём.
- 5) Общее количество детекторов должно быть как можно меньшим.

#### Требования задачи.

- 1) Придумать вариант расстановки детекторов, позволяющий однозначно определить точное местоположение корабля, и в котором используется как можно меньше детекторов.
- 2) Доказать, что меньшим числом детекторов обойтись не получится.

(При решении задачи методом ролей план доказательства составляет **Навигатор**.)

**Часть 2. Проведём анализ условия задачи.** (При решении задачи методом ролей эти действия выполняет **Разведчик**.)

Заметим, что один детектор, расположенный у центральных столбцов (строк) не позволяет однозначно определить расположение корабля по столбцам (строкам). Детектор, расположенный у крайнего столбца (строки), в случае если он горит, однозначно определяет в каких столбцах (строках) находится корабль, но «задевает» меньшее количество возможных положений корабля.

**Часть 3. Приведём пример расстановки четырёх детекторов.** (При решении задачи методом ролей построение примера выполняет **Мастер**.)

**Внимание!** Ученики не должны объяснять в решении, как они получили подходящий пример, но желательно, чтобы они умели пояснять, почему этот пример подходит. Мы приведем **один возможный пример** и пояснение, почему он подходит. Существуют и другие примеры. Отдельно мы их не приводим, но каждый из них можно проверить по **алгоритму самопроверки**, приведенному в отдельном файле.

(При решении задачи методом ролей проверку решения выполняет **Эксперт**.)

Приведем один возможный пример, как можно расставить 4 детектора так, чтобы однозначно определить положение корабля.

			Д1	Д2	
5					
4					Д3
3					Д4
2					
1					
	a	b	c	d	e

**Примечание:** во всех верных примерах детектор стоит у среднего столбца и у одного из соседних столбцов, и у средней строки, и у одной из соседних строк.

Объясним, почему данный пример подходит.

#### 1-й способ

Достаточно показать, что мы сможем однозначно определить две строки и два столбца, в которых расположен корабль. Покажем, как определить столбцы (случай со строками разбирается аналогично). Приведём таблицу, в которой установлено соответствие между возможными занятыми столбцами и горящими детекторами:

Столбцы	Горят детекторы
a, b	Д1
b, c	Д1, Д2
c, d	Д2
d, e	никакие

Так как наборы горящих детекторов в каждом случае разные, то по их показаниям можно однозначно определить, в каких столбцах расположен корабль. Аналогично узнаем расположение корабля по строкам.

#### 2-й способ

Обозначим каждое возможное расположение корабля координатой его **левой нижней клетки**. Приведём таблицу, в которой установлено соответствие между каждым возможным расположением корабля и горящими детекторами:

Расположение	Горят детекторы	Расположение	Горят детекторы
a1	Д1	c1	Д2
a2	Д1, Д4	c2	Д2, Д4
a3	Д1, Д3, Д4	c3	Д2, Д3, Д4
a4	Д1, Д3	c4	Д2, Д3
b1	Д1, Д2	d1	никакие
b2	Д1, Д2, Д4	d2	Д4
b3	Д1, Д2, Д3, Д4	d3	Д3, Д4
b4	Д1, Д2, Д3	d4	Д3

Так как наборы горящих детекторов в каждом случае разные, то по их показаниям можно однозначно определить расположение корабля.

**Часть 4. Приведём оценку (доказательство того, что меньшим числом детекторов обойтись не получится).**

Приведем три возможных способа доказательства.

#### 1-й способ доказательства

Предположим, что детекторов не более чем 3. Покрасим детекторы в разные цвета.

Существует 16 различных расположений корабля. Поставим в соответствие каждому расположению корабля набор цветов детекторов, которые горят при данном расположении корабля на поле.

Посмотрим, сколько может быть различных наборов цветов горящих детекторов. Каждый цвет может либо входить в набор, либо не входить, значит всего наборов не более чем  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  (включая пустой набор). Но возможных расположений корабля больше, значит найдутся два различных расположения, закодированные одним и тем же набором цветов. Тогда, если загорятся детекторы именно эти цветов, то однозначно определить расположение корабля не удастся.

## 2-й способ доказательства

Предположим, что детекторов не более чем 3. Тогда либо по вертикали (около столбцов), либо по горизонтали (около строк) стоит не больше 1 детектора. Без ограничения общности можем считать, что не больше 1 детектора стоит по вертикали.

Рассмотрим возможные случаи постановки этого детектора:

**Случай 1.** Детектор стоит в среднем столбце.


Тогда существуют два расположения корабля (обозначены синими квадратами), для которых загораются одинаковые наборы детекторов. Тогда, если загорится именно этот набор детекторов, то однозначно определить расположение корабля не удастся.

**Случай 2.** Детектор стоит не в среднем столбце или отсутствует.

Тогда найдутся 3 подряд идущих столбца, около каждого из которых не установлен детектор.


Среди выделенных цветом клеток можно выделить 2 расположения корабля, для которых загорается одинаковый набор детекторов. Тогда, если загорится именно этот набор детекторов, то однозначно определить расположение корабля не удастся.

## 3-й способ доказательства (в презентацию не включен)

Предположим, что детекторов не более чем 3. Тогда либо по вертикали (около столбцов), либо по горизонтали (около строк) стоит не больше 1 детектора. Без ограничения общности можем считать, что не больше 1 детектора стоит по вертикали. Этот детектор может давать только два возможных показания (либо горит, либо нет), а значит с помощью него мы можем различить не более двух расположений корабля по столбцам.

Но всего возможных положений корабля по столбцам – 4, а значит все случаи различить не удастся. Осталось заметить, что, не зная точно, какие именно столбцы заняты кораблём, нельзя определить точно положение корабля, даже если известны занятые кораблём строки.

**Желаем успехов!**

**Делитесь своими фотографиями и видеороликами в соцсетях!**