ЗАНЯТИЕ 7. Угадай, что я задумал

Учебное содержание

Предметные цели

1. Познакомить учащихся с алгоритмами угадывания с помощью вопросов, не которые можно отвечать только «да» и «нет».

2. Сформировать представление о доказательстве несостоятельности алгоритма, позволяющего при одинаковых начальных данных получить разные ответы, о количестве информации.

3. Развить умение представлять ход алгоритма в табличном виде и в виде графа.

Задача-ключ

Петя загадал натуральное число от 1 до 8, а Вася хочет его отгадать, задавая Пете вопросы, на которые тот будет отвечать только «да» и «нет». Как Васе заведомо отгадать число за 3 вопроса? Можно ли обойтись двумя вопросами?

Решение

За 3 вопроса число отгадать можно. Составим таблицу (или аналогичное дерево):

В1		В2		В3		Число
Число больше 4?	Да (5, 6, 7, 8)	**Число больше 6?**	Да (7, 8)	**Это 8?**	Да	8
					Нет	7
			Нет (5, 6)	**Это 6?**	Да	6
					Нет	5
	Нет (1, 2, 3, 4)	**Число больше 2?**	Да (3, 4)	**Это 4?**	Да	4
					Нет	3
			Нет (1, 2)	**Это 2?**	Да	1
					Нет	2

За два вопроса справиться не получится. Докажем это.

1-*й способ (количество информации)*

Изначально существуют 8 возможных вариантов загаданного числа. За один вопрос с двумя вариантами ответа все множество вариантов разделится на 2 части (те, для которых ответ на вопрос «да» и те, для которых ответ «нет»). Тогда после первого вопроса множество всех вариантов можно сократить не более, чем в два раза (потому что мы заранее не знаем, в какое множество попадем), то есть не менее, чем до 4. Аналогично вторым вопросом можно сократить число вариантов не более, чем до 2, и выбор из этих вариантов будет невозможно сделать без еще одного вопроса.

2-*й способ (кодировка)*

На каждый из двух вопросов может быть получен один из двух ответов («да» или «нет»). Тогда задуманное число должно быть можно однозначно восстановить по двум ответам на вопросы (иначе мы получим два одинаковых набора ответов и не сможем узнать, какой из них соответствует какому числу). Всего есть $2 \cdot 2 = 4$ варианта наборов ответов («да, да», «да, нет»,

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

«нет, да», «нет, нет»). Значит, если вначале было 8 вариантов чисел, некоторые из них нельзя будет различить.

Ответ: нет.

Советы о составлении алгоритмов угадывания

1. При решении задач на угадывание недостаточно привести подходящие вопросы, нужно еще **доказать**, что алгоритм работает.
2. Иногда построить алгоритм угадывания поможет метод **деления пополам**. Данный метод заключается в том, что все множество вариантов одним вопросом делится на две равные части — одну подходящую под ответ «да» и одну — под ответ «**нет**».
3. Изобразить работу алгоритма можно в виде **таблицы** или **дерева** возможностей.

Основные задания

1. Угадайка на доске

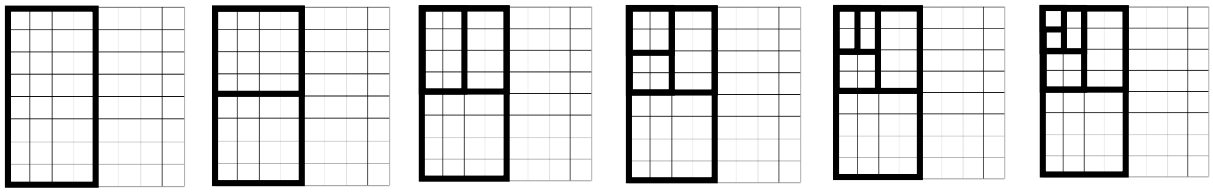
Загадана клетка шахматной доски. За ход можно нарисовать на доске любой прямоугольник со сторонами по линиям клеток и спросить, попала ли туда загаданная клетка. Угадай загаданную клетку за 6 таких вопросов.

Подсказка

Как использовать в данной задаче подход, который помог угадывать задуманное число?

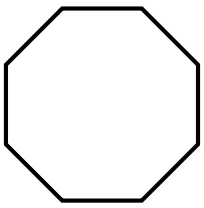
Решение

Покажем последовательность прямоугольников на рисунке. Так как части всегда получаются равными, можно считать, что мы всегда получаем на вопрос ответ «да».



2. Найди муху

На одной из сторон правильного восьмиугольника (смотри рисунок) спряталась муха. За один ход можно провести любую диагональ этого восьмиугольника и спросить, в какой из двух получившихся частей находится муха. Как за три хода заведомо угадать, на какой стороне сидит муха?



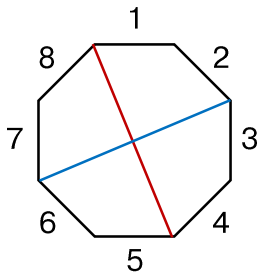
Подсказка

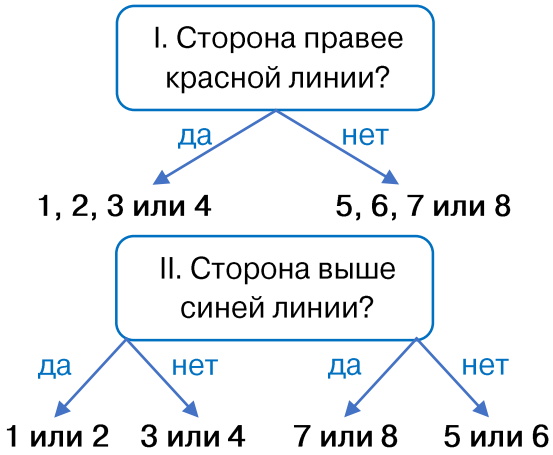
Пронумеруй стороны восьмиугольника. Как использовать в данной задаче подход, который помог угадывать задуманное число?

Решение

Пронумеруем стороны и приведем возможный алгоритм.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute





Далее, проводя линию между оставшимися двумя соседними сторонами, можно определить за один ход, на какой из них спряталась муха.

3. Сотня

Коля загадал пару натуральных чисел, произведение которых равно 100. Помоги Леше угадать эту пару чисел за 3 вопроса, на которые можно отвечать только «да» и «нет». Порядок чисел в паре угадывать не нужно.

Подсказка

Сначала определи, какие пары мог загадать Коля.

Решение

Перечислим все возможные пары натуральных чисел с произведением 100:

$$1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20 = 10 \cdot 10 = 100$$

Всего получилось 5 возможных пар чисел. Каждая из пар однозначно угадывается по меньшему числу в паре, поэтому достаточно угадать только его. Приведем возможные вопросы (про меньшее число в паре) в форме таблицы:

<table>
<tr><th>В1</th><th></th><th>В2</th><th></th><th>В3</th><th></th><th>Число</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Число четное?</td><td rowspan="3">Да
(2, 4, 10)</td><td rowspan="3">Делится на 4?</td><td rowspan="2">Да
(4)</td><td rowspan="2"></td><td></td><td rowspan="2">4</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Нет
(2, 10)</td><td rowspan="2">Это 2?</td><td>Да</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Нет
(1, 5)</td><td rowspan="3">Больше 3?</td><td rowspan="2">Да
(5)</td><td rowspan="2"></td><td></td><td rowspan="2">5</td></tr>
<tr><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Нет
(1)</td><td rowspan="2"></td><td></td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Замечание 1

Часто случается, что школьники забывают какие-то «очевидные» варианты пар множителей, например, $1 \cdot 100 = 100$. В этом случае у них может получиться, что якобы достаточно двух вопросов.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Замечание 2

С сильной группой нужно обязательно обсудить, почему других возможных пар с произведением 100 не бывает. Например, это можно объяснить так: из чисел от 1 до 10 число 100 делится только на 1, 2, 4, 5 и 10. Это дает все варианты меньшего числа в паре, потому что если оно будет большее 10, то произведение окажется больше 100.

4*. Поиск в календаре

Кристина хочет узнать, когда у её одноклассника Игоря день рождения. Как Кристине сделать это за 9 вопросов, на которые Игорь будет отвечать только «да» или «нет»?

Подсказка 1

Можно разбить задачу на две — сначала угадать месяц, а потом — число. Сколько вопросов понадобится на каждую часть?

Подсказка 2

Пронумеруй все дни года (не забудь, что год может быть високосным). Сколько вопросов нужно, чтобы угадать номер дня?

Решение

1-*й способ*

Пусть сначала Кристина угадает месяц, задавая вопросы, которые делят множество вариантов пополам (например, в первый раз она может спросить: «Номер месяца больше 6?»). Тогда после первого вопроса останется 6 вариантов, после второго — 3, после третьего — 2, а четвертый вопрос позволит точно угадать месяц. Итак, Кристина смогла угадать месяц за 4 вопроса.

Теперь Кристина будет угадывать число. В месяце не больше, чем 31 день. Действуя аналогичным образом, она справится за 5 вопросов. Всего получится 4 + 5 = 9 вопросов.

2-*й способ*

Всего в году не больше 366 дней. Пронумеруем их все по порядку числами от 1 до 366 (считаем для високосного года). Пусть Кристина задает вопросы, которые каждый раз делят количество вариантов пополам (например, в первый раз она может спросить: «Это число больше 183?»). Тогда каждый раз множество возможных вариантов будет делиться пополам. После первого вопроса останется 183 варианта, после второго — 92, после третьего — 46, после четвертого — 23, после пятого — 12, после шестого — 6, после седьмого — 3, после восьмого — 2, после девятого — 1. Таким образом можно угадать дату рождения Игоря за 9 вопросов.

Тренировочные задания

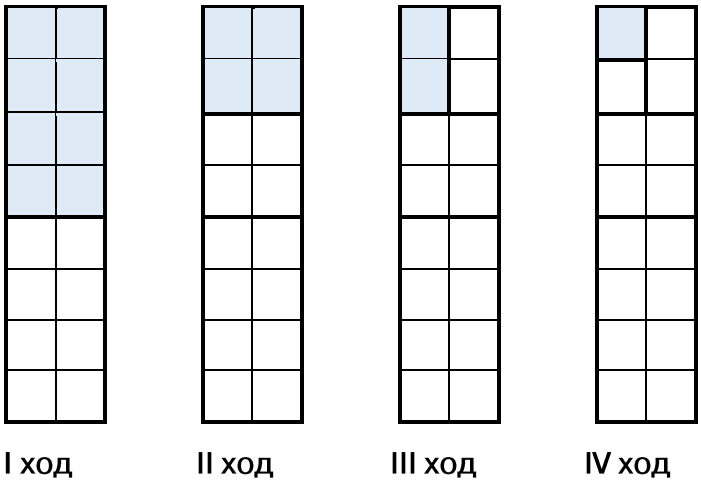
1т. Угадайка на доске

Загадана клетка доски 2 × 8. За ход можно нарисовать на доске любой прямоугольник со сторонами по линиям клеток и спросить, попала ли туда загаданная клетка. Угадай загаданную клетку за 4 таких вопроса.

Решение

Покажем последовательность прямоугольников на рисунке. Так как части всегда получаются равными, можно считать, что мы всегда получаем на вопрос ответ «да».

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

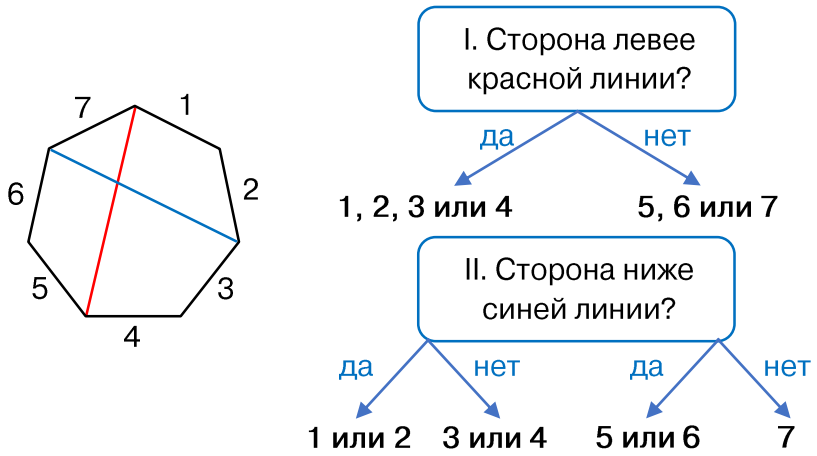


2т. Найди муху

На одной из сторон правильного семиугольника (смотри рисунок) спряталась муха. За один ход можно провести любую диагональ этого семиугольника и спросить, в какой из двух получившихся частей находится муха. Как за три хода заведомо угадать, на какой стороне сидит муха?

Решение

Пронумеруем стороны и приведем возможный алгоритм.



Далее, проводя линию между оставшимися двумя соседними сторонами, можно определить за один ход, на какой из них спряталась муха (если муха спряталась за 7 стороной, то алгоритм найдет ее за 2 хода).

3т. Угадай по делимости

Поля загадала натуральное число от 1 до 8. Толя за ход называет любое натуральное число, и Поля отвечает, делится ли это названное число на задуманное ей. Помоги Толе отгадать задуманное число за три таких хода. (пример: пусть загадано число 3. Толя называет число 9, а Поля отвечает «да», потому что 9 делится на 3)

Решение

Оформим работу алгоритма в виде таблицы.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

B1		B2		B3		Число
8	Да (1, 2, 4, 8)	**2**	Да (1, 2)	**1**	Да	1
					Нет	2
			Нет (4, 8)	**4**	Да	4
					Нет	8
	Нет (3, 5, 6, 7)	**6**	Да (3, 6)	**3**	Да	3
					Нет	6
			Нет (5, 7)	**5**	Да	5
					Нет	7

4т*. Поиск в словаре

В словаре 130 страниц, а на каждой странице — ровно 60 слов. Игорь выбрал какое-то слово из словаря. Как Ане отгадать это слово за 13 вопросов, на которые Игорь будет отвечать только «да» или «нет»?

Решение

Всего в словаре 130 · 60 = 7800 слов. Пронумеруем их все по порядку числами от 1 до 7800. Пусть Аня задает вопросы, которые каждый раз делят количество вариантов пополам (например, в первый раз она может спросить: «Это число больше 3900?»). Тогда каждый раз множество возможных вариантов будет делиться пополам. После первого вопроса останется 3900 вариантов, после второго — 1950, после третьего — 975, после четвертого — 488, после пятого — 244, после шестого — 122, после седьмого — 61, после восьмого — 31, после девятого — 16, после десятого — 8, после одиннадцатого — 4, после двенадцатого — 2, и после тринадцатого — 1. Таким образом можно угадать слово за 13 вопросов.

Замечание

Другой способ решения этой задачи уже не подходит: если попробовать сначала угадать страницу, а потом — слово, то потребуется 14 вопросов.

Дополнительные задания

5. Новогодняя елка

На елке висит 10 игрушек с цифрами (см. рис. 3). Гриша загадал одну из них. Как Машеньке за два вопроса угадать форму загаданной игрушки или цифру, написанную на ней?

Подсказка

Раздели игрушки на несколько групп так, чтобы в одной группе все игрушки были одинаковой формы, либо с одинаковыми числами.

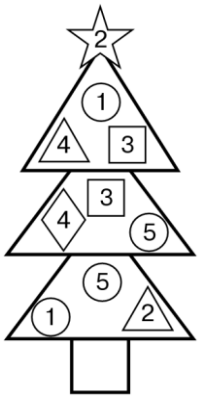


рис. 3

Решение

Заметим, что все цифры 1 и 5 стоят на игрушках, имеющих форму круга. Используем это, объединив игрушки с этими цифрами в одну группу «круги». Можно выделить 4 группы игрушек: «2», «3», «4» и «круглые». Покажем, как за 2 вопроса определить, в какой группе находится загаданная игрушка.

1-й вопрос: «На игрушке нечетное число?».

Если ответ на 1-й вопрос — «да», то 2-й вопрос: «Игрушка круглая?». Если «да», то форма (круг) угадана, если «нет», то это число 3.

Если ответ на 1-й вопрос — «нет», то 2-й вопрос: «На игрушке 2?». Если «да», то число угадано, если нет, то на игрушке написано число 4.

Замечание

Если школьники затрудняются с решением задачи даже после того, как воспользовались подсказкой, можно задать им следующий подводящий вопрос: «На сколько групп можно разделить игрушки, чтобы определить одну группу за два вопроса?»

Путь к решению

Два вопроса помогают разбить все игрушки на 4 группы, в каждой из которых либо общая форма, либо одно и то же число. Среди игрушек есть 4 круга, два квадрата, два треугольника, ромб и звезда. Оба числа 3 находятся в квадратах, значит в одной группе с квадратом может быть только квадрат. Поместим их в одну группу. Все числа 1 и 5 находятся в кругах, других чисел в кругах нет, значит в одной группе с кругом может быть только круг. Поместим круглые игрушки в одну группу. Тогда останутся числа 2, и 4, которые можно разбить на 2 группы, в каждой группе — свое число. Получилось 4 разных группы.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute