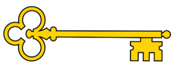
Занятие 24. Разбиение на пары

Учебное содержание

Предметные цели

1. Познакомить с понятием взаимно-однозначного соответствия между элементами двух множеств (разбиения на пары).
2. Познакомить с приемом использования взаимно-однозначного соответствия для сравнения мощностей[1] конечных множеств.
3. Формировать умение доказывать взаимную однозначность соответствий и ее отсутствие.
4. Познакомить с приемом использования разбиения на пары для решения комбинаторных задач.

Задача-ключ



Все трехзначные числа разбили на два множества: четные и нечетные, и подсчитали сумму всех чисел в каждом множестве. а) Ответь, не вычисляя суммы, в каком из множеств сумма оказалась больше. б) Вычисли, на сколько эта сумма больше.

Решение.

а) Разобьем все трехзначные числа на пары по порядку следующим образом: $(n, n+1)$. Так как в ряду натуральных чисел четные и нечетные числа чередуются, то первое число в каждой паре будет четным, а второе – нечетным. При этом каждый «нечетный» элемент в паре на 1 больше, чем каждый «четный» элемент. Значит, сумма всех нечетных трехзначных чисел больше суммы всех четных трехзначных чисел.

б)

1-*й способ (взаимно-однозначное соответствие)*.

Всего есть 999 – 99 = 900 трехзначных чисел, которые можно разбить на 900 : 2 = 450 пар. Значит, так как в каждой паре на нечетное число на 1 больше четного, сумма всех нечетных чисел на 450 больше, чем сумма всех четных.

2-*й способ (подсчет)*.[2]

Вспомним приемы из темы «Треугольные числа» и вычислим обе суммы. Заметим, что от 100 до 999 всего 900 чисел, то есть в каждой сумме будет 450 слагаемых.

Сумма четных:

$$100 + 102 + \ldots + 998 = S_1$$
$$998 + 996 + \ldots + 100 = S_1$$
$$2S_1 = 1098 \cdot 450 = 494100$$
$$S_1 = 247050$$

Сумма нечетных:

$$101 + 103 + \ldots + 999 = S_2$$
$$999 + 997 + \ldots + 101 = S_2$$
$$1100 \cdot 450 = 495000$$

[1] В случае конечных множеств мощностью множества называется количество элементов в этом множестве.

[2] Для данной задачи и многих других непосредственный подсчет сложнее применения метода разбиения на пары. Здесь он приводится как раз для демонстрации этой особенности.

$$S_2 = 247500$$

Разница сумм равна $S_2 - S_1 = 247500 - 247050 = 450$.

Ответ. а) В группе нечетных чисел; б) на 450.

Советы по решению комбинаторных задач

1. Для сравнения количества элементов в двух множествах или сравнения двух сумм можно использовать метод разбиения на пары.
2. Если все элементы двух множеств разбились на **непересекающиеся** пары, то в этих множествах одинаковое число элементов.
3. Если после разбиения на пары в одном из множеств оказались элементы без пары, то в этом множестве больше элементов, чем во втором.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. О каких числах идет речь в задачи? Сколько всего чисел?
2. О каких множествах идет речь в задаче? Сколько элементов в каждом из них?
3. Какие советы из темы «Комбинаторика» помогут при подсчетах?
4. В задаче речь идет о сравнении количества чисел или сумм чисел?
5. Можно ли все числа/элементы разбить на пары? Почему?
6. По какому принципу можно разбить числа/элементы на пары так, чтобы было просто узнать ответ на вопрос задачи?
7. Сколько пар получилось?

Как проверить

1. Решение комбинаторной задачи методом соответствия можно проверить с помощью непосредственного вычисления количества вариантов (например, при помощи правил суммы и произведения).
2.При разбиении на пары заданным способом нужно понять, полное ли разбиение произошло, или какие-то элементы остались без пары.

Основные задания

1. Четные и нечетные (5 мин)

Все натуральные числа от 251 до 701 включительно разбили на две группы: четные и нечетные. Затем вычислили суммы всех чисел внутри каждой группы. В какой группе сумма оказалась больше и на сколько?

Подсказка.

Можно ли разбить все числа от 251 до 701 на пары? Почему? Как можно преодолеть это затруднение?

Решение.

1-*й способ.*

1) 701 – 250 = 451 (ч.) – всего;

2) (451 – 1) : 2 = 225 (ч.) – четных (так как нечетных больше);

3) 225 + 1 = 226 (ч.) – нечетных;

4) Разобьем числа, кроме первого (251), на пары (n, n+1). Тогда в каждой паре первое число – четное, второе – нечетное, причем четное на 1 меньше соответствующего нечетного. Всего 225 пар, то есть во всех парах вместе сумма нечетных на 225 больше. Но есть еще одно нечетное число – 251.

5) 225 + 251 = 476.

2-*й способ.*

1) 701 – 250 = 451 (ч.) – всего;

2) (551 – 1) : 2 = 225 (ч.) – четных;

3) 225 + 1 = 226 (ч.) – нечетных;

4) Разобьем числа, кроме последнего (701), на пары (n, n+1). Тогда в каждой паре первое число – нечетное, второе – четное, причем нечетное на 1 меньше соответствующего четного. Всего 225 пар, то есть во всех парах вместе сумма четных на 225 больше. Но есть еще одно нечетное число – 701.

5) 701 – 225 = 476.

Ответ. В группе нечетных на 476 больше.

2. Большая разница (4 мин)

Среди всех пятизначных чисел выделили две группы: в первую из них попали все числа, оканчивающиеся на 7, а во вторую – все числа, оканчивающиеся на 9. В какой из групп сумма всех чисел больше и на сколько?

Подсказка.

Поставь в соответствие каждому числу из первой группы одно число из второй группы.

Решение.

1) Составим пары чисел из указанных множеств следующим образом: $\overline{abcd7}, \overline{abcd9}$. Тогда в паре второе число всегда на 2 больше первого.

2) 9 · 10 · 10 · 10 · 1 = 9 000 (ч.) – в каждой группе.

3) 9 000 · 2 = 18 000.

Ответ. Во второй группе на 18 000 больше.

3. Сумма цифр (5 мин)

Все трехзначные натуральные числа разбили на две группы: четные и нечетные. Затем вычислили **суммы цифр** всех чисел внутри каждой группы, и все эти суммы цифр сложили. В какой группе итоговая сумма оказалась больше и на сколько?

Подсказка.

Разбей трехзначные числа на пары и посмотри, на какие цифры оканчиваются числа внутри одной пары. Что можно сказать о разнице сумм цифр у чисел в парах?

Решение.

Разобьем все трехзначные числа, начиная с начала, на пары (n, n+1). Рассмотрим последние цифры чисел в парах:

..0, ..1 ..2, ..3 ..4, ..5 ..6, ..7 ..8, ..9

По признаку делимости на 2 понимаем, что первое число в любой паре – четное, а второе – нечетное. Заметим, что числа в паре отличаются только последней цифрой. Это значит, что у второго числа в паре сумма цифр на 1 больше, чем у первого. Всего получится 900 : 2 = 450 пар трехзначных чисел, значит, сумма цифр у всех нечетных трехзначных чисел на 450 больше, чем сумма цифр у всех четных трехзначных чисел.

Ответ. У нечетных чисел на 450.

Замечание.

В приведённом решении было важно проверить, что во всех парах сумма цифр первого числа на 1 меньше суммы цифр второго числа. Если бы разбиение на пары было по такому соответствию последних цифр:

1-2, 3-4, 5-6, 7-8, 9-0

то для пары 9-0 разность будет другой, так как происходит переход через десяток. Если дети не заметили, что это место может оказаться трудным, можно им задать вопрос, почему такой проблемы не возникает. Помимо перебора всех пар цифр из соответствия, возможно общее объяснение, основанное на том, что если возникает переход через десяток между соседними числами, то в такой паре первое число нечётное, а второе чётное, а в соответствии из решения таких пар нет.

4*. Нули и единицы (5 мин)

Код состоит из 11 цифр – нулей или единиц. Сколько существует кодов, в которых четное число единиц?

Подсказка.

Каких кодов больше: тех, в которых четное число единиц, или кодов, в которых нечетное число единиц?

Решение.

В коде может быть четное или нечетное число единиц. Разобьем все коды на пары по следующему принципу: один код получается из другого заменой всех нулей на единицы, а всех единиц – на нули. Тогда в одном коде из пары будет четное число единиц, а во втором – нечетное число единиц. Значит, всего существует равное количество кодов, и их число равно половине от общего количества таких кодов. Всего из нулей и единиц можно составить 2^{11} кодов[3], а тех, в которых четное число единиц – в два раза меньше, то есть 2^{10}.

Ответ. $2^{10} = 1024$ кода.

Тренировочные задания

1т. Четные и нечетные

Пятиклассники Женя и Сеня упражнялись в счете. Они открыли книгу на 222 странице и, начиная с этой страницы, листали ее вперед, складывая числа по такому принципу: Женя складывал все четные номера страниц, а Сеня – все нечетные номера страниц. Свои вычисления они закончили на 334-й странице (последний раз Женя прибавил к своей

сумме 334). На сколько Женина сумма оказалась больше, чем Сенина?

Решение.

1-*й способ.*

1) 334 – 221 = 113 (стр.) – всего;

2) (113 – 1) : 2 = 56 (стр.) – посчитал Сеня;

[3] Смотри тему «Комбинаторика»

3) 56 + 1 = 57 (стр.) – посчитал Женя;

4) Разобьем страницы на пары НЧ (нечетная-четная) кроме первой (стр. 222). Всего получается 56 пар. В каждой паре Женино число на 1 больше. Значит, во всех парах сумма на 56 больше.

5) 222 + 56 = 278.

2-*й способ.*

1) 334 – 221 = 113 (стр.) – всего;

2) (113 – 1) : 2 = 56 (стр.) – посчитал Женя;

3) 56 + 1 = 57 (стр.) – посчитал Сеня;

4) Разобьем страницы на пары ЧН. Всего получается 56 пар и «лишняя» стр. 334. В каждой паре Сенино число на 1 больше. Значит, во всех парах сумма на 56 больше.

5) 334 – 56 = 278.

Ответ. На 278.

2т. Большая разница

Среди всех четырехзначных чисел, все цифры которых четны, выделили две группы: в первую попали все числа, цифра в разряде сотен которых — двойка, а во вторую — все числа, вторая цифра в которых — восьмёрка. В какой из групп сумма всех чисел больше и на сколько?

Решение.

1) Одно число не может быть в двух группах (вторая цифра числа либо 2, либо 8).

2) Составим пары чисел двух групп так: образом: $\overline{a2bc}, \overline{a8bc}$ (например, 2200 и 2800).

3) 800 – 200 = 600 — второе число в паре больше первого

4) Число пар равно количеству чисел в группе. Найдём его, учитывая, что все

цифры чётны, вторая задана, а на первом месте не может быть 0.

4 · 1 · 5 · 5 = 100 (ч.) — в каждой группе

5) 100 · 600 = 60 000

Ответ: во второй группе на 60 000 больше.

3т. Сумма цифр

Все натуральные числа от 250 до 700 разбили на две группы: четные и нечетные. Затем вычислили **суммы цифр** у всех чисел внутри каждой группы, а потом все эти суммы цифр сложили. В какой группе итоговая сумма оказалась больше и на сколько?

Решение.

1) 700 – 249 = 451 (ч.) – всего.

2) Разобьем числа, кроме последнего, на пары (n, n+1). Будет 225 пар. В каждой паре сумма цифр второго (нечетного) числа на 1 больше суммы цифр первого (четного) числа. Вся сумма у нечетных на 225 больше. Осталось четное число 700.

3) 225 – (7 + 0 + 0) = 218.

Ответ. В группе нечетных на 218 больше.

Замечание.

Если разбивать на пары последовательных чисел иначе, оставляя отдельно число 250, а дальше создавая пары нечётное-чётное, то такое соответствие работать не будет, так как между числами в паре может оказаться переход через десяток.

4т*. Свобода выбора

В магазине продаются 10 различных наборов конструктора. Лариса нашла, сколькими способами она может выбрать 7 разных наборов, а Никита — сколькими способами он может выбрать 3 разных набора. У кого из ребят получилось больше способов — у Ларисы или Никиты?

Решение.

Разобьем все варианты выбора для Ларисы и для Никиты на пары. Пусть Лариса выбрала какие-то 7 наборов конструктора. Поставим этому выбору в пару выбора Никитой остальных 3 наборов. Таким образом, все варианты разбиваются на пары, а значит их равное количество.

Ответ. Их поровну.

Замечание.

Можно обратить внимание детей, что рассуждения вида «чем больше наборов выбираем из заданного числа, тем больше способов это сделать», приводящее к неверному ответу в этой задаче, не работают.

Дополнительные задания

5. Возрастание и убывание

а) Каких чисел больше: 7-значных, цифры которых идут в порядке убывания, или 3-значных, цифры которых идут в порядке убывания?

б) А каких больше: 7-значных чисел, цифры которых идут в порядке возрастания, или 3-значных, цифры которых идут в порядке убывания?

Подсказка.

а) Подумай, на какую задачу занятия похожа данная задача.

б) Какой цифры не может быть в записи натурального числа, цифры которого идут в порядке возрастания?

Решение.

а) Если в числе цифры идут по убыванию, то все цифры в нём разные. Тогда каждому числу из n цифр соответствует ровно один набор из n разных цифр, которые входят в это число. И наоборот, каждому набору из n разных цифр соответствует число из n цифр, в котором цифры идут по убыванию. По задаче 4т способов выбрать 3 объекта из 10 столько же, сколько способов выбрать 7 объектов из 10. Поэтому 7-значных, цифры которых идут в порядке убывания, столько же, сколько 3-значных таких чисел

б) По пункту а) 3-значных чисел цифры которых идут в порядке убывания, столько же, сколько 7-значных, где цифры в порядке убывания. Осталось сравнить 7-значные «убывающие» и 7-значные «возрастающие».

Сопоставим каждому «убывающему» числу его же, записанное в обратном порядке. Тогда полученное число определяется однозначно, оно будет «возрастающее», каждое «возрастающее» число будет соответствовать ровно одному «убывающему». Но те числа «убывающие» числа, которые оканчиваются цифрой 0, окажутся без пары, так как на 0 число начинаться не может. Поэтому 7-значных «убывающих» чисел больше, чем 7-значных «возрастающих». Следовательно, 3-значных «убывающих» чисел больше, чем 7-значных «возрастающих».

Ответ. а) Их поровну; б) больше трёхзначных.

6. Номера билетов

На маршруте трамвая №17 продаются билеты с номерами из трех цифр (то есть от 000 до 999). Билет назовем *удачным*, если сумма цифр номера билета равна 13, а если сумма цифр номера билета равна 14, то такой билет называется *хорошим*. Каких билетов на маршруте №17 больше: удачных или хороших?

Подсказка.

Заметь, что сумма 13 + 14 = 27 = 9 + 9 + 9.

Решение.

Поставим в пару удачному билету $\overline{abc}$ второй билет, каждая цифра которого заменена по принципу: $a \to 9 - a, b \to 9 - b, c \to 9 - a$. При этом билет был удачным, то есть $a + b + c = 13$, тогда $9 - a + 9 - b + 9 - c = 27 - a - b - c = 27 - (a + b + c) = 14$. Значит, в пару к удачному билету встает счастливый (и наоборот). Значит, таких билетов одинаковое количество.

Ответ. Их поровну.

Замечание

Даже те, кто справился с предыдущими задачами, могут в этой задаче строить «соответствия», в которых некоторые элементы остаются без пары, или наоборот получают более одного напарника. Таким, скорее всего тупиковым, если не рассматривать отдельные случаи, вариантом, например, является добавление в пару числа, у которого последняя цифра на 1 больше, чем в данном, так как из числа с цифрой 9 на конце таким образом может быть получено число с неподходящей суммой цифр.

Здесь можно ещё раз обратить внимание детей на то, что при построении соответствия каждому числу должно ставиться в пару ровно одно число.