

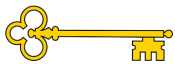
ЗАНЯТИЕ 23. ВОКРУГ КУБА

Учебное содержание

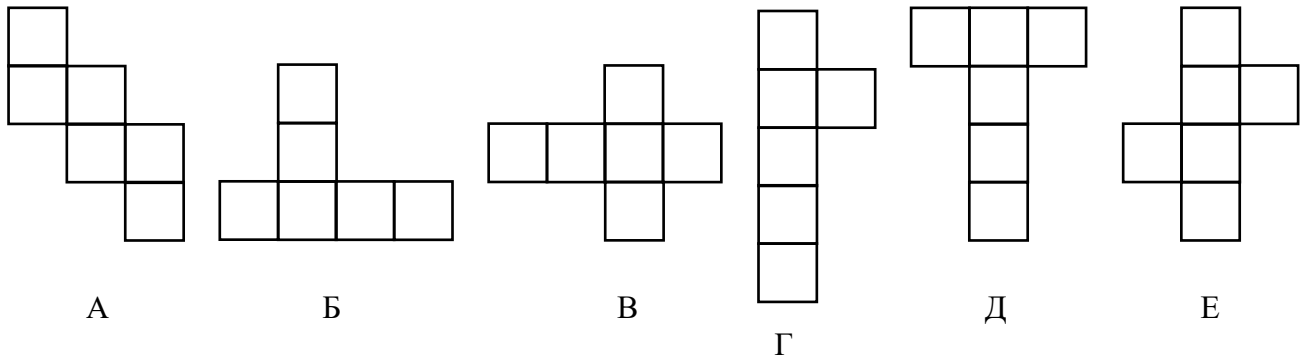
Предметные цели

1. Познакомить с понятием развертки объемной фигуры.
2. Дать первичный опыт работы с развертками на примере разных разверток куба, доказательства невозможности сложить данную фигуру с помощью данной развертки.
3. Развить представления о трех видах объемной фигуры (вид спереди, вид сверху, вид сбоку) и восстановлении фигуры по трем ее видам.

Задача-ключ



Какие из данных фигур являются развертками куба? Объясни свой ответ, не складывая модель из бумаги. Проверь свои предположения по бумажной модели.



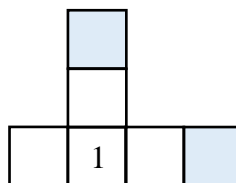
Решение

Заметим, что все данные фигуры состоят из 6 квадратов, которые после сгибания должны стать гранями куба (а значит, квадраты при сгибании не могут накладываться). Если у двух квадратов есть общая сторона, то по ней должна идти линия сгиба (она будет ребром куба).

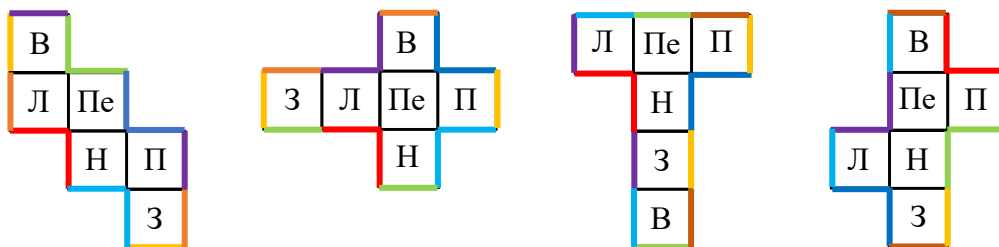
Сначала объясним, почему фигуры Б и Г не являются развертками куба.

В фигуре Г есть линия из 5 квадратов, соединенных сторонами. При ее сгибании по линиям между квадратами два квадрата наложатся, а значит не все 6 граней куба получится сложить.

При сгибании фигуры Б по линиям наложатся два квадрата, отмеченные на рисунке цветом (они обе будут напротив грани, отмеченной цифрой «1»). Значит, не все 6 граней куба получится сложить.



Из остальных фигур сложить куб можно. Чтобы показать это, отметим одинаковым цветом ребра, которые будут «склеиваться» при сгибании. Также для удобства подпишем, какой гранью может стать каждая (В — верхняя, Н — нижняя, П — правая, Л — левая, Пе — передняя, З — задняя).



Ответ: А, В, Д, Е.

Замечание

Рассмотрение «правильных» разверток лучше начать с фигуры В, так как данная развертка, скорее всего, знакома детям и для нее просто отметить совмещающиеся при сгибании стороны. Фигура А, скорее всего, будет самой трудной для разбора.

Советы по решению задач про объемные фигуры и развертки

Разверткой объемной фигуры назовем плоскую фигуру, которая при складывании по отмеченным линиям сгиба (без промежутков и наложений) превращается в поверхность этой объемной фигуры (без промежутков и наложений).

1. Если в развертке куба имеются три квадрата, расположенные подряд по вертикали или горизонтали, то квадраты, идущие через один, соответствуют **противоположным** граням куба.
2. При решении задач бывает полезно отметить возможное положение граней куба (передняя, задняя, верхняя, нижняя, левая, правая).
3. Чтобы обосновать, что данная фигура является разверткой куба, можно отметить одинаковым цветом **пары** внешних сторон квадратиков, которые будут соединяться при складывании.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. Какие нужно сделать действия, чтобы предлагаемая развертка превратилась в куб?
2. Какие условия при этом должны выполняться?

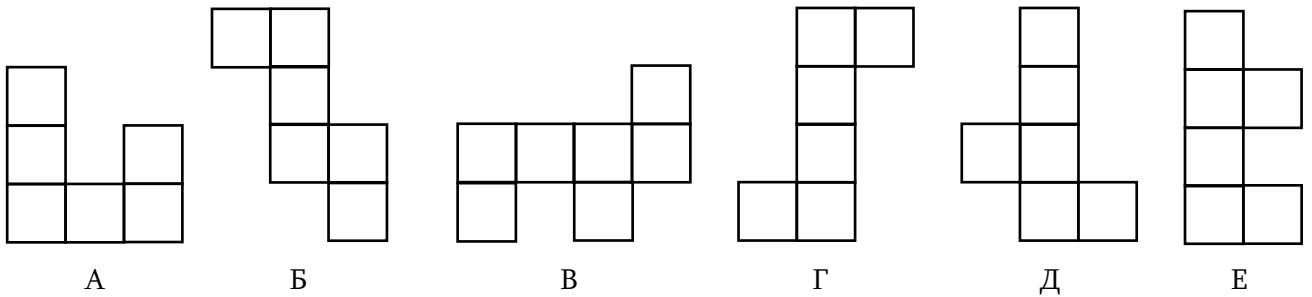
Как проверить

Теоретические предположения о фигуре можно проверить по ее бумажной модели.

Основные задания

1. Найди их все! (4мин)

Какие из данных фигур являются развертками куба? Объясни свой ответ, не складывая модель из бумаги. Проверь свои предположения по бумажной модели.



Подсказка

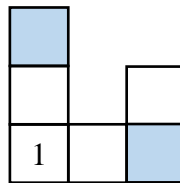
Какие из соседних сторон квадратов должны совмещаться при сгибании фигуры?

Решение

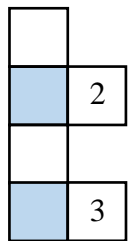
Сначала поясним, почему фигуры А, В и Е не являются развертками куба.

В фигуре В 7 квадратов, которые должны стать гранями куба, но у куба всего 6 граней.

Рассмотрим фигуру А. В ней есть две линии из 3 подряд идущих квадратов (горизонтальная и вертикальная). Поэтому при сгибании наложатся два квадрата, отмеченные цветом, так как они оба станут противоположными гранями для квадрата, отмеченного цифрой 1.

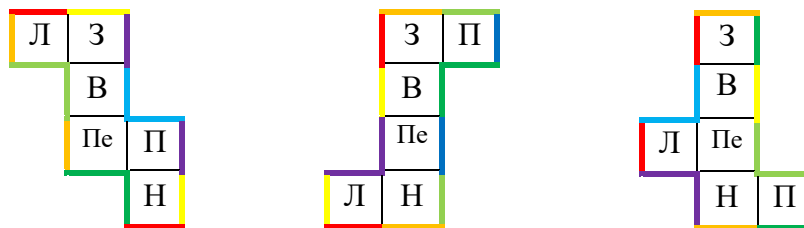


Рассмотрим фигуру Е. В ней есть вертикальная линия из 4 квадратов. При сгибании по линиям квадраты, отмеченные на рисунке цветом, станут противоположными гранями куба, например, верхней и нижней. Тогда квадраты, отмеченные цифрами 2 и 3, наложатся (так как оба станут правой гранью). Но тогда не все 6 граней куба получится сложить.



Теперь покажем, что все остальные фигуры являются развертками куба.

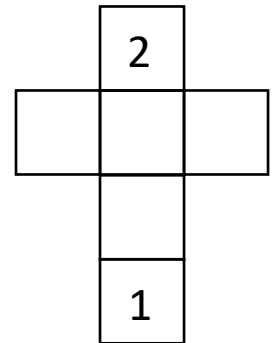
Чтобы показать это, отметим одинаковым цветом ребра, которые будут «склеиваться» при сгибании. Также для удобства подпишем, какой гранью может стать каждая (В — верхняя, Н — нижняя, П — правая, Л — левая, Пе — передняя, З — задняя).



Ответ: Б, Г, Д.

2. Уровень воды (3 мин)

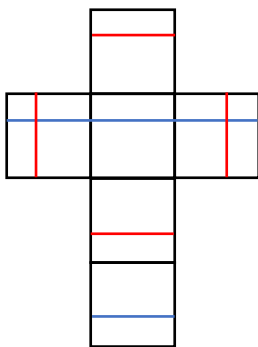
В прозрачный аквариум в форме куба на треть налили воды и закрыли плотной крышкой, а затем обвели уровень воды красным карандашом. Потом его повернули на соседнюю грань, и снова обвели уровень воды, на этот раз синим карандашом. На рисунке дана развертка этого куба, грани, на которых он стоял, отмечены цифрами 1 и 2 соответственно. Проведи на развертке линии, которые были сделаны по уровню воды.



Подсказка

Для каждого из случаев сначала отметь грани, которые в кубе будут боковыми и ребра, которые будут прилегать ко дну.

Решение



Путь к решению

Отметим те грани, которые будут соседними с гранью 1. В каждой из них отметим ребро, между ней и гранью 1. Проводим параллельный красный отрезок на расстоянии в $\frac{1}{3}$ стороны. Далее, проделывая все то же самое с гранью 2, проводим синие отрезки.

Замечание

Чтобы точно проводить все отрезки, удобно начертить эту развертку на клетчатой бумаге, приняв за сторону квадрата число клеток, делящееся на 3.

3. На грани (4 мин)

На каждой грани куба нарисовали по картинке. На рисунке справа показана развёртка этого куба (с другой её стороны рисунков нет). а) На каком из рисунков А – Г может быть изображён этот куб, если одна из картинок на кубе скрыта? Укажи все варианты.

б) Дорисуй эту скрытую картинку на белой грани.

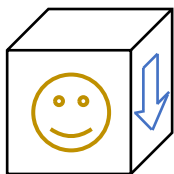


Рисунок 1

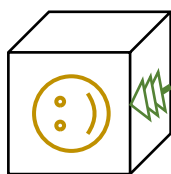


Рисунок 2

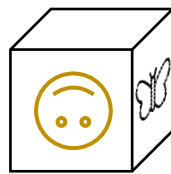


Рисунок 3

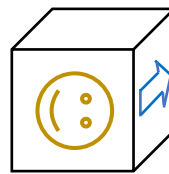
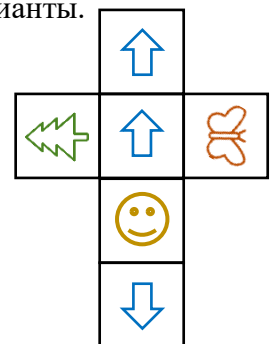


Рисунок 4

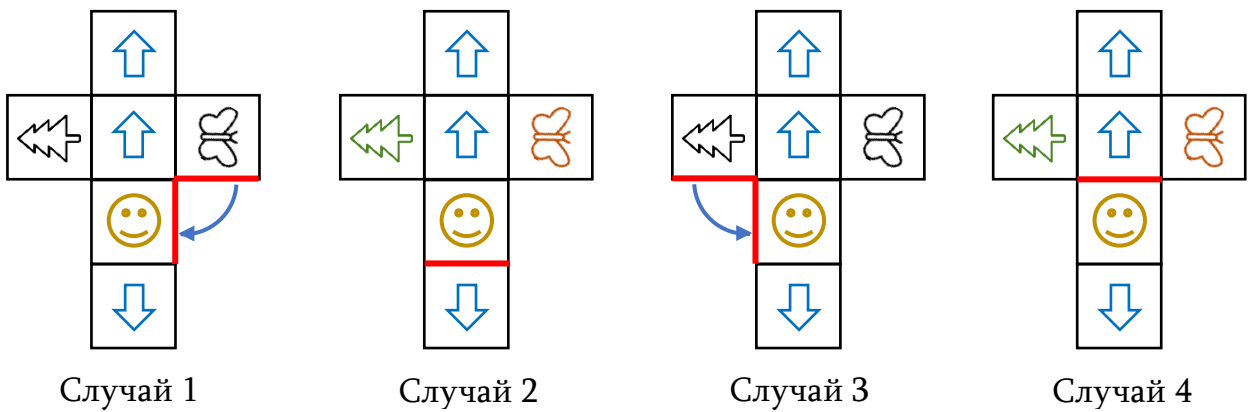


Подсказка

Сначала найди грань-смайлик на развертке и покажи, каким ребром она связана со второй гранью кубика, на которой дан рисунок.

Решение

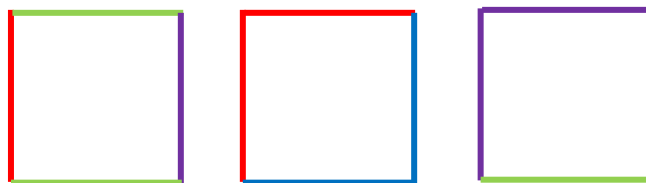
- 1) Сначала рассмотрим рисунок 1. Отметим на развертке правую сторону грани-смайлика (именно она является ребром, соединяющим эту грань со второй данной). Но при сворачивании развертки это ребро будет между гранью-смайликом и гранью-бабочкой, а должна быть стрелка. Значит, этот кубик не подходит.
- 2) Рассмотрим рисунок 2. Теперь нужное ребро — нижнее на развертке. Оно соединяет грань-смайлик и грань со стрелкой. Этот кубик также не подходит.
- 3) Рассмотрим рисунок 3. Теперь нужное ребро — левое на развертке. Оно соединяет грань-смайлик с гранью-елочкой. Этот кубик также не подходит.
- 4) Рассмотрим рисунок 4. Нужное ребро — верхнее на развертке. Оно соединяет грань-смайлик с гранью-стрелкой, причем направленной вверх от верха смайлика. Этот вариант подходит. При этом ребро, соединяющее с данной белой гранью, находится на развертке справа, то есть это должна быть елочка вверх ногами относительно грани-смайлика.



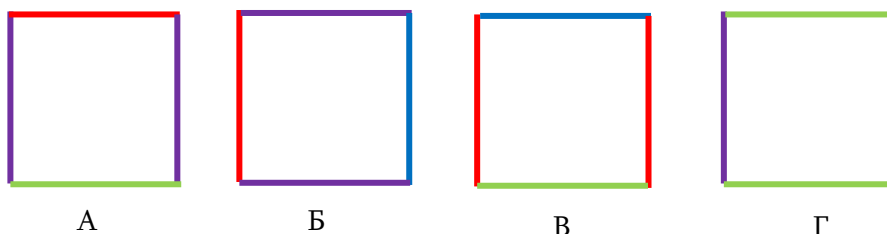
Ответ: В случае 4

4*. Цветные грани (4 мин)

У Матвея был белый кубик. Он покрасил каждое ребро этого кубика в некоторый цвет. Матвея трижды бросил свой кубик. При взгляде сверху получились такие картинки:



После этого Матвей бросил кубик еще раз. Какие картинок А–Г у него могли получиться?



Подсказка

Найди две грани такие, что на одной нет ребер тех цветов, которые есть на другой. Как могут располагаться эти грани?

Решение

Обратим внимание, что среди цветов ребер на гранях, выпавших второй и третьей по счету, нет одинаковых, значит, эти грани находятся друг напротив друга (назовем их Задней и Передней), а все другие грани, которые могли выпасть, расположены между ними. Тогда грань, выпавшая первой по счету, содержит красное ребро в Задней грани и фиолетовое ребро в Передней грани. Заметим, что из вершины Задней грани, в которой сходятся два красных ребра этой грани, также обязательно выходит зеленое ребро. Рассмотрим каждую из предложенных картинок.

А) Передняя и Задняя грань не могут содержать ребра одинакового цвета, значит, они должны содержать красное и зеленое ребра (два фиолетовых не могут). Но тогда из вершины Задней грани, в которой сходятся два красных ребра, должно выходить фиолетовое ребро, так как из обоих концов красного ребра на рассматриваемой грани выходит по фиолетовому ребру, а один из этих концов и есть эта вершина. Это противоречит тому, что там должно быть зеленое ребро. Следовательно, такая грань выпасть не могла.

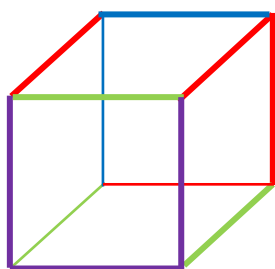
Б) Передняя и Задняя грань не могут содержать ребра одинакового цвета, значит, они должны содержать красное и синее ребра. При этом в Передней грани нет ни красного, ни синего ребра, значит, такая грань также выпасть не могла.

В) Передняя и Задняя грань не могут содержать ребра одинакового цвета, значит, они должны содержать зеленое и синее ребра. Строим пример куба с выпавшей сверху гранью.

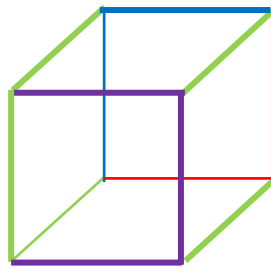
Проверка: в начале могли выпасть нижняя, задняя и передняя грани.

Г) Передняя и Задняя грань не могут содержать ребра одинакового цвета, значит, они должны содержать фиолетовое и синее ребра. Строим пример куба с выпавшей сверху гранью.

Проверка: в начале могли выпасть нижняя, задняя и передняя грани.



К пункту В)



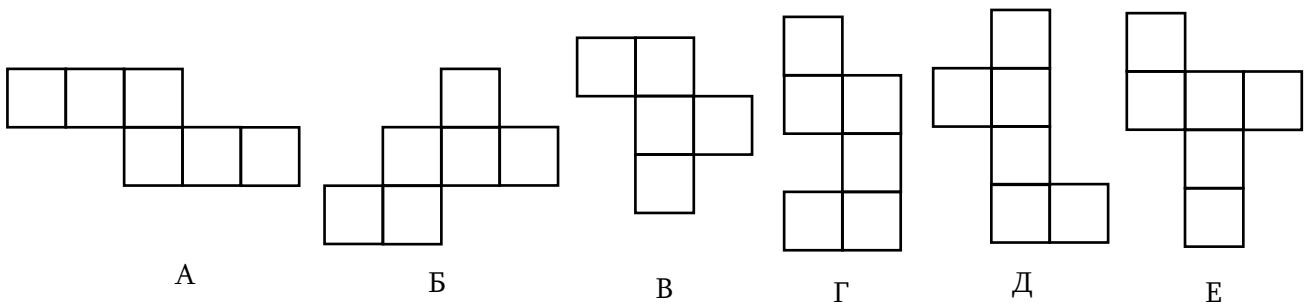
К пункту Г)

Ответ: В, Г.

Тренировочные задания

1т. Найди их все!

Какие из данных фигур являются развертками куба? Объясни свой ответ, не складывая модель из бумаги. Проверь свои предположения по бумажной модели.



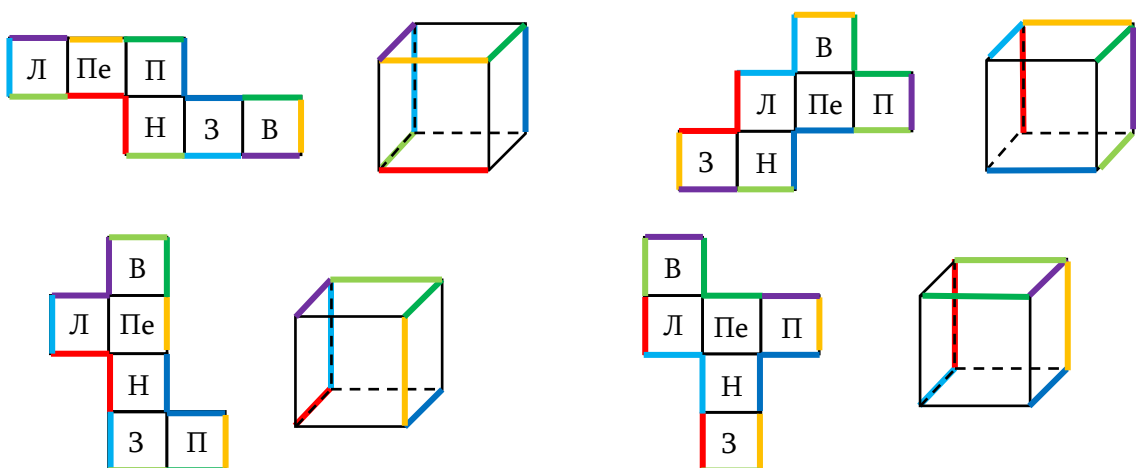
Решение

Сначала докажем, что фигуры В и Г не являются развертками куба.

В фигуре В всего 5 квадратов, и они не смогут при сгибании по сторонам квадратов стать 6 гранями куба.

В фигуре Г есть вертикальная линия из 3 квадратов, значит, квадраты, отмеченные цветом, станут противоположными гранями куба, например, верхней и нижней. Но тогда квадраты, отмеченные цифрами 1 и 2, оба станут левыми гранями куба, и все 6 граней куба не получится сложить.

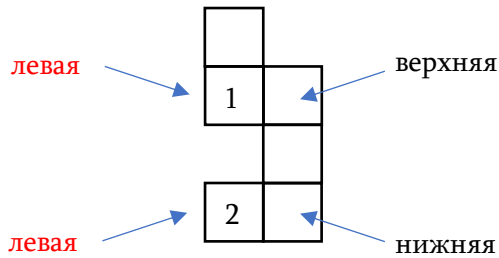
Теперь покажем, что все остальные фигуры являются развертками куба. Для этого отметим на развертках одинаковым цветом стороны квадратов, которые совмещаются при сгибании.



Запись на доске и в пособии

Фигура В. 5 квадратов, не могут стать 6 гранями куба. ⇒ Не является разверткой куба.

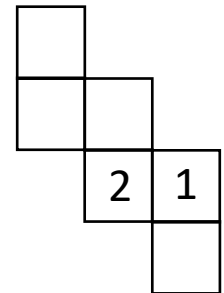
Фигура Г. При сгибании грани 1 и 2 накладываются (см. рис.). ⇒ Не является разверткой куба.



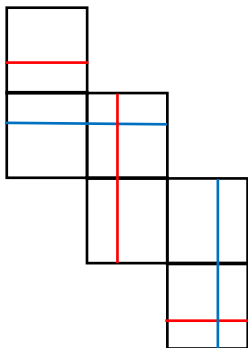
Ответ: А, Б, Д, Е.

2т. Муха на кубе

На столе лежал кубик со стороной 3 см. По его боковым сторонам проползла муха, двигаясь на высоте 2 см. Затем кубик перевернули на соседнюю грань, и муха опять проползла по его граням на той же высоте. На рисунке дана развертка куба, грани, на которых он стоял, отмечены цифрами 1 и 2 соответственно. Прочерти на развёртке первый маршрут мухи красным цветом, а второй — синим.



Решение



Путь к решению

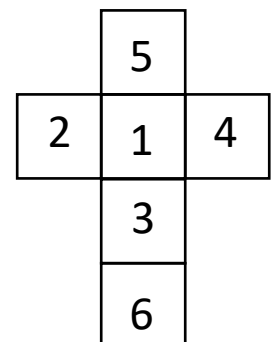
Отметим те грани, которые будут соседними с гранью 1. В каждой из них отметим ребро, между ней и гранью 1. Проводим параллельный отрезок на расстоянии в $\frac{2}{3}$ стороны. Далее, проделывая все то же самое с гранью 2, проводим отрезки из второго маршрута.

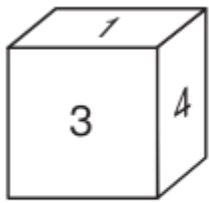
Замечание

Чтобы точно проводить все отрезки, удобно начертить эту развертку на клетчатой бумаге, приняв за сторону квадрата число клеток, делящееся на 3.

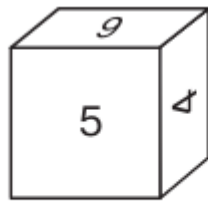
3т. На грани

На каждой грани куба написано по одной цифре. На рисунке справа показана развертка такого куба. На каком из рисунков может быть изображен этот куб? Укажи все варианты.

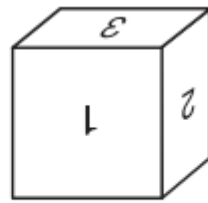




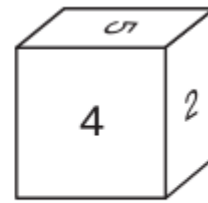
А



Б



В



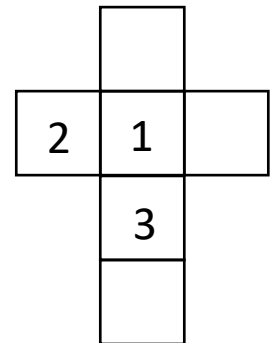
Г

Решение

1) Сначала рассмотрим рисунок 1. Отметим на развертке правую сторону грани «1». При сворачивании развертки это ребро будет между гранями «1» и «4». Однако на развертке эти цифры направлены в одну сторону, а на кубике они направлены в разные стороны. Следовательно, этот кубик не подходит.

2) Рассмотрим рисунок 2. Самое нижнее ребро на развертке должно быть расположено между гранями с цифрами «5» и «6». Но если соединить эти грани, то цифры 5 и 6 будут направлены в одну сторону, в то время как на кубике они направлены в противоположные стороны. Этот кубик также не подходит.

3) Рассмотрим рисунок 3. Можно сопоставить кубу такую развертку, как на рисунке справа. Она не противоречит исходной развертке, этот кубик подходит.

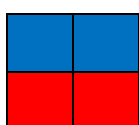
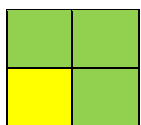
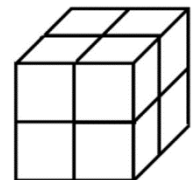


4) Рассмотрим рисунок 4. По развертке видим, что цифры 2 и 4 должны быть на противоположных гранях, а на кубике они стоят на соседних гранях. Этот кубик не подходит.

Ответ: на рисунке 3.

4т*. Куб из кубиков

У Насти было 8 кубиков, каждый из них был покрашен в какой-то цвет. Он склеил из этих кубиков большой куб (см рисунок). Она бросила этот куб дважды, при этом сверху выпали такие картинки:



После этого Петя бросил куб еще раз. Какие из данных картинок могли при этом выпасть сверху?



А



Б



В



Г

Решение

Обратим внимание, что на двух выпавших гранях нет цвета, который есть и на той, и на другой, значит, эти грани находятся напротив (назовем их Передней и Задней), а все другие грани, которые могли выпасть, расположены между ними. Тогда каждый кубик был увиден сверху ровно один раз, и можно найти цвета всех кубиков: 3 зеленых, 2 синих, 2 красных и 1 желтый. Рассмотрим каждую из предложенных картинок.

А) На картинке 2 желтых кубика, а в составе куба такой кубик только один, значит, эта картинка выпасть не могла.



Б) Да, возможный пример:

Кубик, который не видно, покрашен в красный цвет.



В) Да, возможный пример:

Кубик, который не видно, покрашен в красный цвет.

Г) Картинка не является ни Задней, ни Передней гранью, значит, это одна из оставшихся граней. У такой грани в любой паре диагонально противоположных клеток одна принадлежит кубику из Передней грани, а другая — кубику из Задней грани. Но на картинке зеленая и желтая клетки диагонально противоположны, а ни одна из них не может принадлежать Задней грани. Значит, эта картинка выпасть не могла.

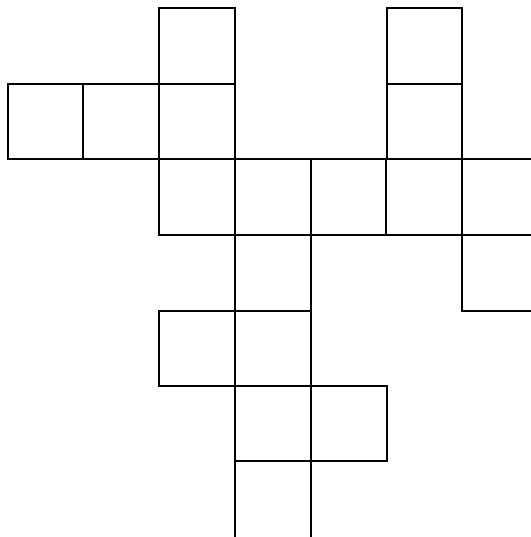
Ответ: Б и В.

Дополнительные задания

5. Вот так фигура

На рисунке приведена развёртка объёмной фигуры, составленной из кубиков. Нарисуй, как выглядит эта

фигура, и проверь свой ответ по бумажной модели.



Подсказка

Развертку можно примерно разделить на 3 части. На что похожа каждая из них?

Решение

Развертку можно примерно разделить на три части, каждая из которых похожа на развертку куба. Если начать складывать фигуру, начиная с этих «крайних» частей, то образуются три кубика, соединенных посередине. Получится такая фигура, как на рисунке.

