Занятие 22. Комбинаторика.

Учебное содержание

Предметные цели

1. Познакомить с правилами суммы и произведения (правилами ИЛИ и И) при решении задач на подсчет вариантов.
2. Развить умение проводить полный перебор вариантов, применять дерево возможностей для перебора вариантов.
3. Расширить область применения метода соответствия (разбиения на пары).

Задача-ключ

Придумай удобный способ посчитать количество восьмизначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, …, 7. Цифры в числе могут повторяться.

Решение

1-*й способ*[1]

Существуют 7 возможных вариантов первой цифры числа (1, 2, …, 7). Для каждого из этих вариантов будет своя ветвь дерева возможностей. Так как случаи независимы (первая цифра может быть ИЛИ 1, ИЛИ 2, ИЛИ 3, и так далее), то количества вариантов в каждом из этих случаев нужно будет сложить («правило сложения»).

Рассмотрим ветвь дерева возможностей для некоторой первой цифры. На втором уровне дерева будет 8 вариантов (любая цифра от 0 до 7). Для каждого выбора второй цифры нужно будет выбрать и третью цифру. Так как каждому варианту выбора второй цифры соответствует 8 вариантов выбора третьей цифры, то всего будет $8 \cdot 8 = 64$ варианта выбрать вторую И третью цифру («правило умножения»).

Аналогично с добавлением каждого нового уровня общее количество вариантов увеличивается в 8 раз. Значит, для каждого выбора первой цифры всего будет 8^7 чисел. Всего получается $7 \cdot 8^7$ чисел.

2-*й способ*

Существует 7 способов выбора первой цифры (от 1 до 7). На остальных местах может быть любая из 8 цифр. По правилу произведения получается всего $7 \cdot 8^7$ чисел.

Ответ: $7 \cdot 8^7$ чисел.

Замечание

Количество чисел (значение произведения) равно 14 680 064. Однако от учеников не нужно требовать соответствующих вычислений.

[1] Рекомендуется первым разбирать именно этот способ решения, так как он демонстрирует и правило сложения, и правило умножения.

Советы по решению комбинаторных задач

1. **Правило сложения.** Для нахождения общего числа вариантов в нескольких непересекающихся случаях нужно сложить количества вариантов в этих случаях.
2. **Правило умножения.** Если есть n вариантов выбора первого объекта и для каждого из них — m вариантов выбора второго объекта, то количество вариантов выбора и того и другого равно произведению mn.
3. Ответ комбинаторной задачи можно не вычислять, а оставить в виде выражения.
4. Найденный приём подсчёта количества вариантов можно проверить на меньших числах.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. О каких числах идет речь в задаче?
2. Какие ограничения есть на эти числа?
3. Как можно организовать процесс подсчёта чисел?
4. На какие одинаковые по количеству группы можно разбить эти числа, чтобы посчитать их?
5. Какие ответы получаются при рассмотрении «малых случаев»? Как можно провести аналогию?

Как проверить

Несостоятельность ответа можно проверить на «малых случаях».

Основные задания

1. Большие числа (4 мин)

а) Сколько существует семизначных чисел без единиц в записи? б) А сколько существует семизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна единица?

Подсказка к пункту а)

Определи количество возможных вариантов цифр на каждом месте в записи семизначного числа.

Подсказка к пункту б)

Попробуй воспользоваться методом дополнения.

Решение

а) 1) 10 – 1 – 1 = 8 (цифр) — может быть на первом месте (кроме 0 и 1)

2) 10 – 1 = 9 (цифр) — может быть на любом другом месте

3) По правилу произведения получается $8 \cdot 9^6$ чисел.

б) Воспользуемся методом дополнения. Всего существует $9 \cdot 10^6$ семизначных чисел. Количество чисел, в записи которых есть хотя бы одна единица, равно разности общего количества чисел и количества чисел без единиц, то есть $9 \cdot 10^6 - 8 \cdot 9^6$.

Запись на доске и в рабочей тетради

Ответ: а) $8 \cdot 9^6$ чисел; б) $9 \cdot 10^6 - 8 \cdot 9^6$ чисел.

Замечание: а) это равно 4 251 528; б) это равно 4 748 472. Но от детей эти значения не требуются.

2. Факториал (4 мин)

Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n:

$$n! \text{ («эн-факториал»)} = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Например, 3! («три-факториал») = 6. Придумай задачу на подсчет вариантов, в ответе на которую будет число 5!

Подсказка

Может подойти любая задача на подсчет количества вариантов расстановки 5 различных предметов на 5 мест.

Решение

Например, может подойти такая задача: «На перемене 5 школьников побежали в столовую и встали в очередь за булочками. Сколько различных вариантов очереди могло получиться?»

Замечание

При работе с этой задачей рекомендуется попросить школьников пояснить, почему в ней получается именно тот ответ, который требуется. Например, для предложенной задачи решение может быть таким:

На 1-м месте может оказаться любой из 5 человек. На каждом следующем месте может быть на одного человека меньше, чем на предыдущем (на того человека, который встал в ряд в прошлый раз).

Всего по правилу произведения получается $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ вариантов.

3. Концерт (5 мин)

На концерте должны по очереди выступить 6 музыкантов, среди которых есть Женя и Лиза. Сколькими способами можно составить расписание так, чтобы Женя оказалась в нем раньше Лизы? Обрати внимание, что порядок остальных музыкантов в расписании важен!

Подсказка 1

Каких вариантов расписания больше: тех, в которых Женя выступает раньше Лизы, или тех, в которых они выступают в обратном порядке?

Подсказка 2

Если бы Женя выступала первой, то сколько вариантов было бы у Лизы?

Решение

1-*й способ*

Всего существует $6! = 720$ способов составить расписание без ограничений. Разобьем все варианты на пары, отличающиеся только перестановкой Жени и Лизы. Так как все варианты разбились на пары, то ровно в половине способов Женя будет раньше Лизы, то есть всего $720 : 2 = 360$ способов.

2-*й способ*

1) Пусть Женя выступает первой. Тогда Лиза может выступать на любом из оставшихся 5 мест. Всего получается $5 \cdot 4! = 120$ способов.

2) Пусть Женя выступает второй. Тогда Лиза может выступать на 3, 4, 5 или 6 месте. Получается $4 \cdot 4! = 96$ способов.

3) Пусть Женя выступает третьей. Тогда Лиза может выступать на 4, 5 или 6 месте. Получается $3 \cdot 4! = 72$ способа.

4) Пусть Женя выступает четвертой. Тогда Лиза может выступать на 5 или 6 месте. Получается $2 \cdot 4! = 48$ способов.

5) Пусть Женя выступает пятой. Тогда Лиза может выступать только на 6 месте. Получается $1 \cdot 4! = 24$ способа.

6) Шестой Женя выступать не может.

7) $120 + 96 + 72 + 48 + 24 = 360$ (сп.)

Ответ: $6!:2 = 360$ способов.

4*. Театральный лабиринт (5 мин)

театре «Лабиринт» страны Конфе2тия билет на детский спектакль стоит столько цукатов, сколькими способами можно прочитать слово ТЕАТР, двигаясь по записи только вправо и вниз, начиная с левого верхнего угла (см. пример на рисунке).

Т	Е	А	Т	Р
Е	А	Т	Р	
А	Т	Р		
Т	Р			
Р				

Сколько стоит билет на спектакль?

Подсказка

Сколько всего раз нужно выбрать направление чтения следующей буквы?

Решение

Обозначим → случай, когда следующей читается буква справа, а ↓ случай, когда следующей читается буква снизу. После первой буквы требуется четыре раза выбирать направление, поэтому любой путь, с помощью которого можно прочитать слово «ТЕАТР», задается последовательностью из четырех таких стрелок. Стрелку на каждом из 4 мест можно выбрать 2 способами, поэтому всего $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ способов прочитать слово, то есть билет стоит 16 цукатов.

Ответ: 16 цукатов.

Тренировочные задания

1т. Большие числа

а) Сколько существует шестизначных чисел, все цифры в которых различны? б) А сколько существует шестизначных чисел, в которых есть хотя бы две цифры одинаковы?

Решение

а) На первом месте в числе может быть любая цифра, кроме 0, то есть всего 9 вариантов. На втором месте — любая цифра, кроме той, что оказалась на первом месте (цифры не должны повторяться). На третьем месте — любая кроме двух первых. По правилу произведения всего получится $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ чисел.

б) Все шестизначные числа делятся на те, в которых все цифры различны, и те, в которых есть хотя бы две одинаковые цифры. Значит, чтобы найти количество чисел, в которых есть хотя бы две повторяющиеся цифры, нужно из общего количества чисел вычесть то, которое найдено в пункте а). Получим $9 \cdot 10^5 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ чисел.

Запись на доске и в рабочей тетради

а) 1) 10 – 1 = 9 (цифр) — может быть на первом месте (кроме 0)

2) 10 – 1 = 9 (цифр) — может быть на втором месте (кроме первой)

3) Аналогично на оставшихся местах может быть 8, 7, 6, 5 цифр.

4) По правилу произведения получается $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ чисел.

б) Всего $9 \cdot 10^5$ шестизначных чисел, по методу дополнения $9 \cdot 10^5 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ чисел, в которых хотя бы две цифры одинаковые.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^5$ (ч.) — всего шестизначных (А)

2) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ — количество чисел, в которых все цифры разные (см. пункт а)

3) $9 \cdot 10^5 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ (ч.) — в которых хотя бы 2 цифры одинаковые

Ответ: а) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ чисел; $9 \cdot 10^5 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ чисел.

Замечание: а) это равно 136 080; б) это равно 763 920. Но от детей эти значения не требуются.

2т. Сладкий календарь

В каждую клетку таблицы 2 × 7 вклеили конверт. У пса Чарлика есть 14 разных лакомств, которые он хочет разложить в конверты по одной, чтобы потом есть их в течение двух недель. Сколькими способами Чарлик может разложить лакомства?

Решение

Занумеруем конверты в клетках таблицы цифрами от 1 до 14, например, так:

14 в. 13 в. 12 в. …

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14

Тогда в 1-й конверт можно положить любую из 14 конфет, во 2-й конверт — любую из 13 конфет, и так далее. Последняя конфета окажется в 14-м конверте. Всего по правилу произведения получается $14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 14!$ вариантов.

Ответ: 14! вариантов.

Замечание: это равно 40320. Но от детей это значение не требуется.

3т. Концерт

Витя выписал все семибуквенные слова, которые можно составить из букв «К», «О», «Н», «Ц», «Е», «Р», «Т», в которых каждая буква встречается ровно один раз (слова не обязательно осмысленные). Каких слов получилось больше: тех, у которых буква «О» идет раньше, чем «Е», или тех, где «О» идет позже?

Решение

Заметим, что все слова разбиваются на пары, отличающиеся только порядком букв «О» и «Е» (например, КОНЦЕРТ и КЕНЦОРТ). Поэтому таких слов поровну.

Ответ: слов поровну.

4т*. Театральный лабиринт

В стране Конфетии абонемент в театр «Лабиринт» на осенний сезон стоит столько цукатов, сколькими способами можно прочитать слово ЛАБИРИНТ, двигаясь по записи только вправо или вниз (см. пример на рисунке). Сколько стоит абонемент?

							Л
						Л	А
					Л	А	Б
				Л	А	Б	И
			Л	А	Б	И	Р
		Л	А	Б	И	Р	И
	Л	А	Б	И	Р	И	Н
Л	А	Б	И	Р	И	Н	Т

Сколько стоит абонемент?

Решение

Посчитаем число подходящих путей. Заметим, что в записи есть только одна буква «Т», и поэтому любой путь должен приходить в эту букву. Тогда количество способов прочитать слово «ЛАБИРИНТ», двигаясь только вправо и вниз, равно количеству способов прочитать слово «ТНИРИБАЛ», начав с буквы «Т» и двигаясь только влево и вверх. Выбирать направление нужно 7 раз, значит все слова задаются последовательностью из 7 стрелок, каждая из которых может быть либо ⟵, либо ↑. Поэтому всего $2^7 = 128$ путей, то есть абонемент стоит 128 цукатов.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) Только одна буква «Т» ⇒ любой путь должен заканчиваться в ней.

2) Любой путь можно пройти от конца к началу.

3) Всего 8 букв ⇒ Выбирать одно из двух направлений нужно 7 раз (для всех букв, кроме «Т») ⇒ Всего $2^7 = 128$ путей ⇒ Абонемент стоит 128 цукатов.

Ответ: 128 цукатов.

Дополнительные задания

5. Разбиение на пары

На планете Крон живут племена тырликов и малистинок. На бал пришли 8 тырликов и 8 малистинок. Сколькими способами можно разбить всех пришедших на пары из разных племен? Обязательно проверь свои рассуждения на «малых случаях»!

Подсказка

Прежде чем вычислять количество вариантов, расставь всех тырликов в ряд.

Решение

Расставим тырликов в ряд, назовем их А Б В Г Д Е Ж З. В пару к А может встать любая из 8 малистинок, к Б — любая из оставшихся 7, и так далее. Всего получается $8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1 = 8!$ способов.

Ответ: 8! способов.

Замечание: это равно 40320. Но от детей это значение не требуется.

6. Двузначные числа (Нет в пособии!)

Каких двузначных чисел больше: тех, у которых сумма цифр четна, или тех, у которых сумма цифр нечетна?

Подсказка

Попробуй воспользоваться методом разбиения на пары.

Решение

Разобьем все двузначные числа на пары подряд идущих: (10,11), (12,13), …, (98, 99). Заметим, что при таком разбиении в парах окажутся числа, оканчивающиеся на 0 и 1, 2 и 3, 4 и 5, 6 и 7, 8 и 9. Таким образом, цифры в разряде десятков у чисел в парах одинаковы. Заметим, что тогда суммы цифр у чисел в парах отличаются на 1, а значит имеют различную четность. Это значит, что чисел с четной суммой цифр и нечетной суммой цифр поровну.

Ответ: их поровну.