Занятие 21. Семь раз отмерь… (Разрезания с предварительным анализом)

Учебное содержание

Предметные цели

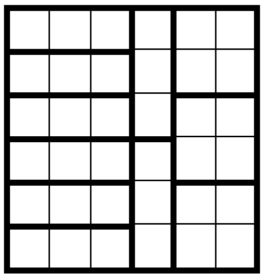
1. Развить представления о предварительном анализе в задачах на разрезание.
2. Тренировать умение применять метод «малых случаев», разбивать задачу на подзадачи.
3. Познакомить со способами решения уравнений в целых неотрицательных числах.
4. Тренировать умение применять метод «подсчет двумя способами» на примере задач на разрезание.

Задача-ключ

Разрежь квадрат 6×6 на 11 клетчатых частей с одинаковыми периметрами.

Решение

Один из возможных примеров такого разрезания — на рисунке.



Путь к решению

1) Сначала проведем анализ площадей частей. Так как площадь фигуры равна $6 \cdot 6 = 36$ клеток, а всего частей 11, то все части не могут иметь одинаковую площадь ($36 : 11 = 3$ (ост. 3)). Так как «средняя» площадь одной части больше 3, но меньше 4, то можно попробовать разрезать фигуру на части из 3 и 4 клеток.

2) Дальше попробуем найти количество возможных фигур, если все они имеют площадь 3 или 4. Сумма площадей равна 36, поэтому число 36 нужно разложить в сумму 11 троек и четверок. Попробуем подобрать такое разложение, используя аналогию с задачами про ноги и головы[1].

Пусть все 11 фигур состоят из 3 клеток. Тогда общая площадь фигур равна $3 \cdot 11 = 33 < 36$. Если взять на одну трехклеточную фигуру меньше, а на одну четырехклеточную — больше, то общая площадь фигур увеличится на 1. Значит, в разрезании будет $(36 - 33) : 1 = 3$ фигуры из 4 клеток и $11 - 3 = 8$ фигур из трех клеток.

Замечание. Также количество фигурок каждого типа можно найти с помощью уравнения

3) Теперь определим возможную форму частей. В условии сказано только то, что это клетчатые фигуры. При этом существуют две трехклеточные фигуры (полоска и уголок), и 5 четырехклеточных фигур (тетрамино). Для упрощения поиска подходящего примера можно использовать, например, только прямоугольники. Тогда заметим, что трехклеточная полоска и четырехклеточный квадрат имеют равные периметры (8). Поэтому можно попробовать разделить квадрат 6×6 на три квадрата 2×2 и восемь прямоугольников 1×2. Строим пример и тем самым проверяем, что такое разрезание возможно.

[1] См. «Математический театр, 4 класс», 4_Занятие 4 «Метод перебора», задачи № 2, 2т, 6.

Советы по решению задач на разрезание

1. Перед разрезанием фигуры на заданное число частей можно сначала оценить площадь частей «в среднем». Для этого площадь всей фигуры нужно поделить на количество частей.
2. Если поделилось не нацело, то обязательно найдётся часть с площадью меньше средней часть с площадью больше средней.
3. Пусть нужно разрезать фигуру на части с двумя разными площадями, и дано общее число частей. Тогда можно найти число частей каждой площади.
   - Предположи, что все части имеют равную площадь (например, наименьшую).
   - Вычисли сумму площадей всех частей.
   - Узнай, на сколько изменится эта сумма площадей при замене одной части.
   - Определи, сколько частей нужно заменить. Так ты узнаешь количество частей другой площади.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. О каких фигурах идет речь в задаче?
2. Какова площадь частей «в среднем»?
3. Какие это могут быть части? Нарисуй их.

Как проверить

Проверь, что выполняются **все** условия задачи.

Основные задания

1. Равные периметры (3 мин)

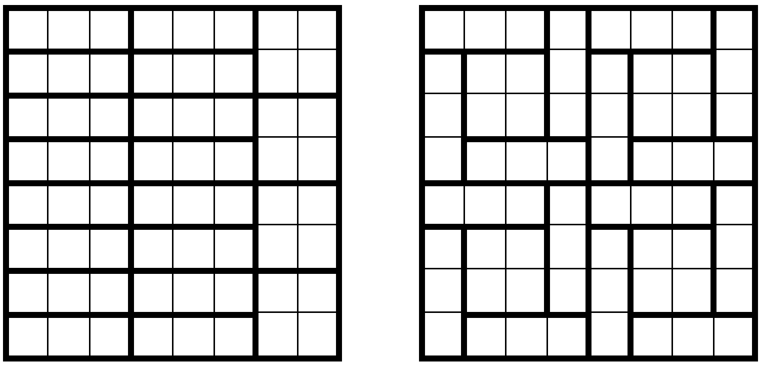
Разрежь квадрат 8×8 по границам клеточек на 20 прямоугольников одинакового периметра.

Подсказка

Какая площадь «в среднем» будет у полученных 20 прямоугольников? У каких прямоугольников площадь близка к этой?

Решение

Два возможных примера такого разрезания — на рисунке. Существуют и другие.



Путь к решению

Покажем, как можно было догадаться до двух приведенных примеров. Начало рассуждения будет одинаковым в обоих случаях (отличие будет только в пункте 4).

1) Площадь фигуры равна $8 \cdot 8 = 64$ клеткам, а всего частей 20. Найдем отсюда площадь одной части «в среднем»: 64 : 20 = 3 (ост. 4). Эта «средняя» больше 3, но меньше 4, поэтому можно попробовать разрезать фигуру на прямоугольники из 3 и 4 клеток.

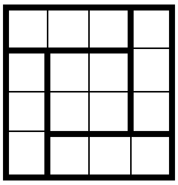
2) Если бы все 20 прямоугольников состояли из 3 клеток, то общая площадь фигур была бы равна $3 \cdot 20 = 60$, что меньше 64. Значит, должны быть и четырехклеточные прямоугольники. Если взять на одну трехклеточную часть меньше и на одну четырехклеточную больше, то суммарная площадь частей увеличится на 1. Значит, в разрезании будет (64 – 60) : 1 = 4 прямоугольника из 4 клеток и 20 – 4 = 16 прямоугольников из трех клеток.

3) Прямоугольник из трех клеток имеет периметр 8, значит, и прямоугольник из четырех клеток должен иметь такой периметр. Единственный подходящий четырехклеточный прямоугольник — это квадрат 2×2.

1-*й способ*

4) Заметим, что на прямоугольники 1×3 можно разрезать любой клетчатый прямоугольник, площадь которого делится на 3 (для этого прямоугольники нужно просто выкладывать рядами вдоль той стороны, длина которой делится на 3). При этом количество частей будет равно площади прямоугольника, деленной на 3. Значит, из 16 прямоугольников 1×3 можно составить прямоугольник площади $16 \cdot 3 = 48$ клеток. Например, это может быть прямоугольник 8×6. Остающуюся полосу размерами 2×8 можно разрезать на 4 квадрата 2×2.

2-*й способ*



4) И количество прямоугольников, и количество квадратов делятся на 4, поэтому можно попробовать заполнить каждую четверть квадрата 8×8 отдельно. На каждую четверть (она имеет форму квадрата 4×4) нужно будет использовать 20 : 4 = 5 прямоугольников (по одному квадрату 2×2 и по 4 квадрата 1×3). Разрезание на нужное число частей дано на рисунке.

2. Поровну фигур (4 мин)

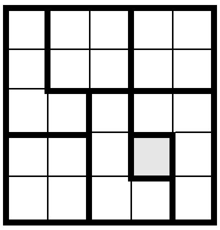
а) Из клетчатого квадрата 5×5 вырежи по линиям сетки поровну O-тетрамино и L-тетрамино так, чтобы получилось как можно больше таких фигур. б) Можно ли вырезать большее количество фигур?

Подсказка

Чему равна площадь каждого кусочка?

Решение

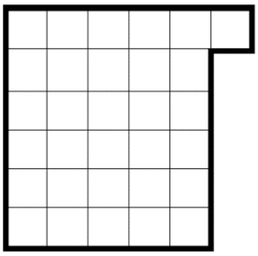
а) Пример вырезания 6 кусочков (по 3 каждого вида) — на рисунке.



б) Площадь квадрата — 25 клеток, а площадь одной части равна 4. Поэтому можно вырезать не более 25 : 4 = 6 ¼ кусочков, то есть не более 6 кусочков.

Ответ: а) возможный пример — на рисунке; б) нет.

3. Все разные (4 мин)



У учителя труда Аристарха Михайловича было несколько одинаковых заготовок, как на рисунке. На уроке он раздал каждому ученику по одной такой заготовке и дал задание: разрезать эту заготовку на 8 клетчатых прямоугольников, среди которых нет одинаковых.

а) Придумай, как это можно сделать.

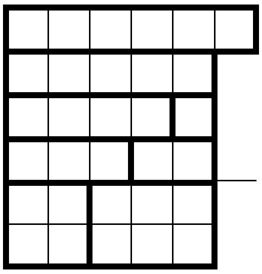
б) Одноклассники Илюша и Федя справились с этим заданием, не подсматривая друг у друга. Докажи, что они получили одинаковые наборы прямоугольников.

Подсказка

Изобрази 8 клетчатых прямоугольников наименьшей площади. Чему равна сумма их площадей?

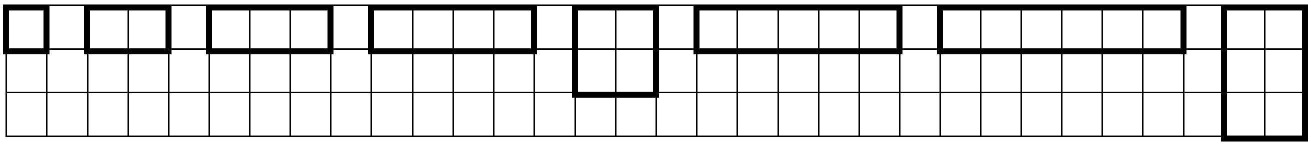
Решение

а) Один из вариантов разрезания — на рисунке.



б) Площадь заготовки равна 36 – 5 = 31 (кл.)

Начнем перебирать прямоугольники, которые могли войти в разрезание, в порядке неубывания площади, начиная с прямоугольника, состоящего из одной клетки. Остановимся, когда наберется 8 частей.



Это будут всевозможные клетчатые прямоугольники с площадями от 1 до 6 клеток. Тот факт, что других прямоугольников с такими площадями нет, просто доказать, разложив все числа от 1 до 6 на два натуральных множителя всеми возможными способами (с точностью до порядка множителей):

$1 = 1 \cdot 1$, $2 = 1 \cdot 2$, $3 = 1 \cdot 3$, $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$, $5 = 1 \cdot 5$, $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$,

Посчитаем суммарную площадь полученных фигур:

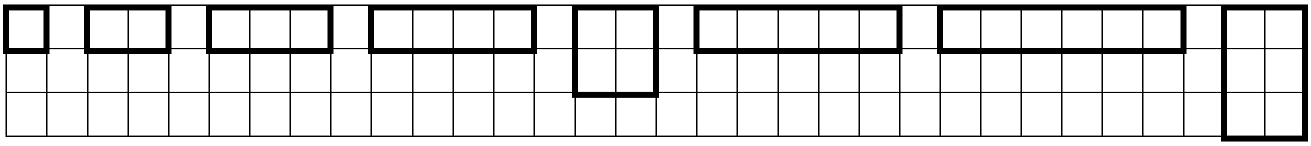
$1 + 2 + 3 + 4 \cdot 2 + 5 + 6 \cdot 2 = 31$ (кл.)

Видим, что суммарная площадь в точности равна площади заготовки. Если же в разрезании будут задействованы другие прямоугольники, то их площадь будет больше 6 клеток, а значит суммарная площадь будет больше площади заготовки и так разрезать не получится. Следовательно, другой набор прямоугольников получиться не мог.

Запись на доске и в рабочей тетради

б) 1) 36 – 5 = 31 (кл.) — площадь заготовки

2) Нарисуем клетчатые прямоугольники наименьшей площади:



$1 = 1 \cdot 1$, $2 = 1 \cdot 2$, $3 = 1 \cdot 3$, $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$, $5 = 1 \cdot 5$, $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$

3) $1 + 2 + 3 + 4 \cdot 2 + 5 + 6 \cdot 2 = 31$ (кл.) — занимают 8 прямоугольников наименьшей площади

4) Сумма площадей 8 прямоугольников наименьшей площади равна площади заготовки ⇒ В любом разрезании будут только эти прямоугольники.

Путь к построению примера

Покажем, как построить пример разрезания в пункте а). Как уже известно из рассуждения в пункте б), разрезать можно только на указанные 8 фигур.

Так как у большинства фигур длинные стороны являются последовательными числами, можно разбить прямоугольники на группы с одинаковой суммой длин, по группе на строку длины 5: $5 = 4+1 = 2+3$. Прямоугольник длины 6 можно выложить отдельно.

4*. Паркетные плитки (4 мин)

Прямоугольную доску 9 дм × 8 дм разрезали на несколько паркетных плиток размерами 3 дм × 2 дм и 6 дм × 1 дм. Общая длина всех распилов оказалось равной 59 дм. Сколько плиток размерами 3 дм × 2 дм могло получиться? Найди все варианты и объясни, почему других нет.

Подсказка

1) Что общего у «коротких» и «длинных» плиток? А что отличается?

2) Чему равна сумма периметров всех прямоугольников? Как она связана с суммарной длиной всех распилов?

Решение

Назовем плитки размерами 6 дм × 1 дм *длинными*, а плитки размерами 3 дм × 2 дм — *короткими*. Заметим, что на любом участке линии распила с каждой из сторон есть прямоугольник, а значит, в суммарном периметре прямоугольников эти линии будут учитываться дважды. Кроме того, периметр внешнего квадрата также должен учитываться в сумме длин периметров.

1) $8 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 59 \cdot 2 = 34 + 118 = 152$ (дм) — сумма периметров всех плиток

2) $2 \cdot (2 + 3) = 10$ (дм) — периметр короткой плитки

3) $(1 + 6) \cdot 2 = 14$ (дм) — периметр длинной плитки

4) $6 \cdot 1 = 3 \cdot 2 = 6$ (дм^2) — площадь одной (любой) плитки

5) $(9 \cdot 8) : 6 = 12$ (пл.) — всего плиток

Пусть все плитки — короткие. Тогда их суммарный периметр будет равен $10 \cdot 12 = 120$ дм, а это меньше найденного периметра (152 дм). Если взять на одну короткую плитку меньше, а на одну длинную больше, то суммарный периметр фигур увеличится на $14 – 10 = 4$ дм. Значит, всего будет $(152 – 120) : 4 = 8$ длинных плиток и $12 – 8 = 4$ коротких.

Ответ: только 4 плитки.

Тренировочные задания

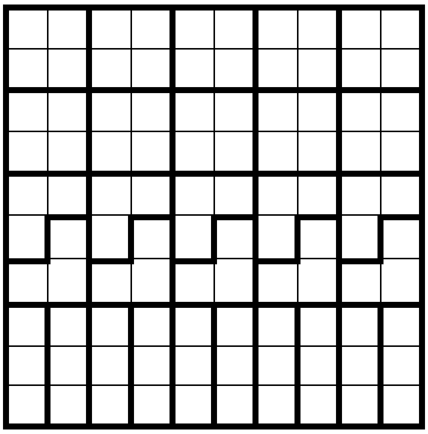
1т. Равные периметры

Тетрадь Иры расчерчена на клетки со стороной 1 см. Ира нарисовала в своей тетради три различные клетчатые фигуры, периметр каждой из которых равен 8 см. Из фигур всех этих трёх типов она смогла составить некоторый квадрат так, что фигур каждого типа в нём оказалось

поровну. Нарисуй пример квадрата, который могла оставить Ира. Расскажи, как ты его придумал

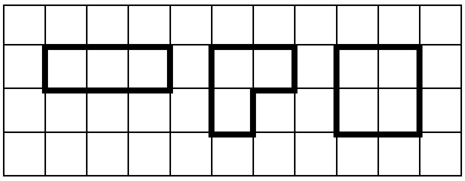
Решение

Один из возможных примеров такого разрезания — на рисунке (1 кл на рисунке соответствует клетке 1 см × 1 см в тетради Иры).



Путь к решению

1) В «пути к решению» для задачи № 1 было установлено, что прямоугольник 1 см × 3 см и квадрат 2 см × 2 см имеют периметр 8 см. Такой же периметр имеет трехклеточный уголок (с помощью перебора фигур наименьшей возможной площади можно убедиться, что данные три фигуры являются единственными подходящими с периметром 8 см).



2) Теперь узнаем, какой квадрат мог получиться у Иры. Пусть она взяла по N фигур каждого из этих трех типов. Площадь такого квадрата равна $4 \cdot N + 3 \cdot N + 3 \cdot N = (4 + 3 + 3) \cdot N = 10 \cdot N$, то есть должна делиться на 10. Подходит квадрат 10 × 10, его и попробуем сложить.

3) Должно получиться по $10 \cdot 10 : 10 = 10$ фигур каждого типа. Будем выкладывать прямоугольники одинакового типа «полосами» длиной 10 клеток.

Из двух трехклеточных уголков можно составить прямоугольник 2 × 3, а из 10 таких уголков — полосу 10 × 3. Из 10 квадратов 2 × 2 в свою очередь можно составить полосу 10 × 4, а оставшуюся полосу размерами 10 × 3 заполнить прямоугольниками 1 × 3.

Замечание

На самом деле, из равного количества фигур данных трех типов можно составить только квадраты, длина стороны которых делится на 10. Действительно, так как площадь квадрата получается делящейся на 10, то, по свойству делимости, площадь делится и на числа 2 и 5. Но если длина стороны не делилась бы на 2 (или на 5), то и площадь бы не делилась на это число.

Значит, длина стороны делится на 2 и на 5, но так как 2 и 5 взаимно просты, длина стороны делится на 10.

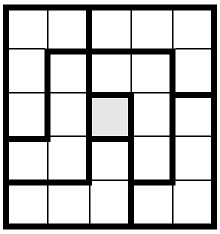
2т. Наибольшее количество

Какое наибольшее количество L-тетрамино можно вырезать из квадрата 5×5?

Решение

25 : 4 = 6 ¼ , значит, можно вырезать не более 6 фигур.

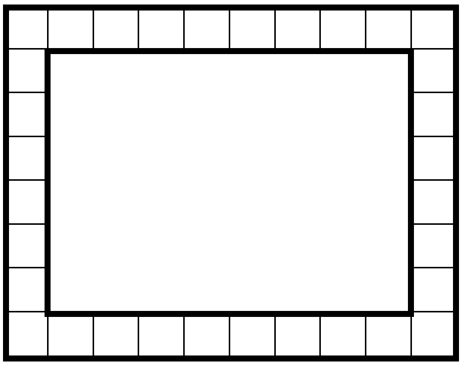
Возможный пример:



Ответ: 6 фигур.

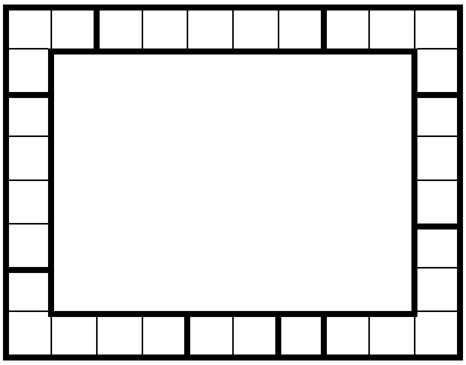
3т. Все разные

а) Разрежь рамку на рисунке на 9 клетчатых фигур, среди которых нет двух одинаковых б) Одноклассники Илюша и Федя справились с этим заданием, не подсматривая друг у друга. Докажи, что они получили одинаковые наборы фигур.



Решение

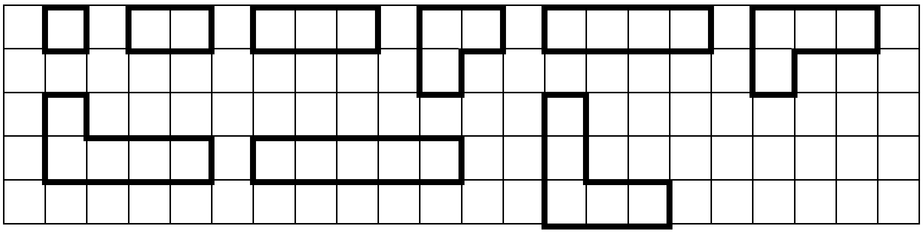
а) Один из возможных примеров разрезания — на рисунке.



б) Докажем, что данную рамку можно разрезать только на те 9 различных фигур, которые получились в пункте а).

Площадь рамки равна 32 клеткам. Изобразим возможные части, перебирая все клетчатые фигуры (в порядке увеличения их площади), которые могут образоваться при разрезании рамки.

Помимо прямоугольников ширины 1 также подходят клетчатые фигуры в форме уголков. Другие клетчатые фигуры (площади меньше 6) вырезать из рамки не получится.



Первые 9 фигур, которые могли получиться при разрезании рамки, имеют площадь не меньше 5. Посчитаем сумму их площадей:

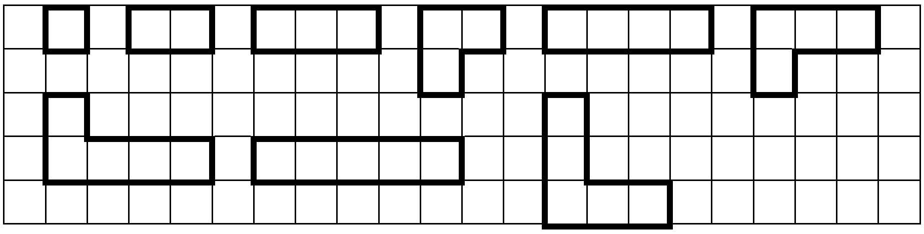
$1 + 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 32$ (кл.)

Все остальные фигуры, которые могут образоваться при разрезании, будут иметь площадь больше 5 клеток, и при их использовании суммарная площадь будет уже больше. Поэтому нельзя подобрать другой набор из 9 различных клетчатых фигур, на которые можно разрезать данную рамку.

Запись на доске и в рабочей тетради

б) 1) $10 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 32$ (кл.) — площадь рамки

2) Нарисуем возможные клетчатые части наименьшей площади (это будут прямоугольники и уголки):



3) $1 + 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 32$ (кл.) — занимают 9 частей наименьшей площади

4) Сумма площадей 9 частей наименьшей площади равна площади рамки ⇒ В любом разрезании будут только эти части.

Путь к решению

Покажем, как построить пример разрезания в пункте а). Как уже известно из рассуждения в пункте б), разрезать можно только на указанные 9 фигур.

Каждый из четырех уголков должен находиться в углу рамки. Расставляем сначала эти уголки, при необходимости меняя их местами, чтобы расположить между ними оставшиеся 5 прямоугольников.

4т*. Разрезание доски

Мастер разрезал прямоугольную доску на 11 плиток, каждая из которых была прямоугольником 2 дм × 1 дм или прямоугольником 2 дм × 3 дм. Длина и ширина доски (в дм) — целые. Сумма периметров плиток оказалась равной 82 дм. Какие размеры могли быть у исходной доски? Не забудь привести пример разрезания для каждого из вариантов и доказать, что других быть не могло.

Решение

1) $2 \cdot (2 + 3) = 10$ (дм) — периметр большой плитки (3 дм × 2 дм)

2) $2 \cdot (2 + 1) = 6$ (дм) — периметр маленькой плитки (2 дм × 1 дм)

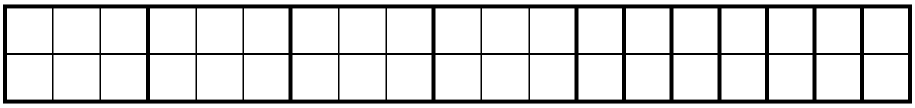
3) $2 \cdot 3 = 6$ (дм^2) — площадь большой плитки

4) $2 \cdot 1 = 2$ (дм^2) — площадь маленькой плитки

5) Определим, какое количество больших плиток могло быть при заданной сумме периметров. Если таких плиток вообще нет, то сумма периметров равна $6 \cdot 11 = 66$ дм. Каждая замена маленькой плитки на большую увеличивает сумму периметров на $10 - 6 = 4$ дм. Значит, больших плиток может быть только $(82 - 66) : 4 = 4$, а маленьких — только $11 - 4 = 7$.

6) Тогда суммарная площадь прямоугольников равна $6 \cdot 3 + 2 \cdot 8 = 38$ см^2. 38 раскладывается на два натуральных множителя двумя способами: $38 \cdot 1$ и $19 \cdot 2$. Первый вариант не подходит, так как из доски шириной в 1 дм нельзя вырезать ни одной плитки размерами 3 дм × 2 дм. Остается единственный вариант: доска размерами <u>19 дм × 2 дм</u>.

Приведем пример разрезания (1 клетка на рисунке соответствует квадрату 1 дм × 1 дм):



Запись на доске и в рабочей тетради

1) $2 \cdot (2 + 3) = 10$ (дм) — периметр большой плитки (3 дм × 2 дм)

2) $2 \cdot (2 + 1) = 6$ (дм) — периметр маленькой плитки (2 дм × 1 дм)

3) $2 \cdot 3 = 6$ (дм^2) — площадь большой плитки

4) $2 \cdot 1 = 2$ (дм^2) — площадь маленькой плитки

5) $6 \cdot 11 = 66$ (дм) — сумма периметров плиток, если все были бы маленькими

6) $82 - 66 = 16$ (дм) — «не хватает»

7) $10 - 6 = 4$ (дм) — больше периметр у большой плитки, чем у маленькой

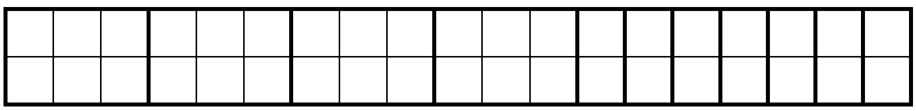
8) $16 : 4 = 4$ (пл.) — больших

9) $11 - 4 = 7$ (пл.) — маленьких

10) $6 \cdot 4 + 2 \cdot 7 = 38$ (дм^2) — площадь доски

11) $38 = 38 \cdot 1 = 19 \cdot 2$. Но доска не может иметь ширину 1 дм из-за больших плиток ⇒ Доска могла иметь только размеры 19 дм × 2 дм.

12) Возможный пример разрезания:



Проверка: $4 \cdot ((2 + 3) \cdot 2) + 7 \cdot ((1 + 2) \cdot 2) = 82$ (дм) — сумма периметров. Подходит.

Ответ: только 19 дм × 2 дм.

Дополнительные задания

5. Два набора

Антону подарили два полных набора фигур тетрамино (по 5 в каждом), и он сложил из нескольких фигур квадрат. Какое наименьшее число фигур могло остаться у Антона неиспользованными?

Подсказка

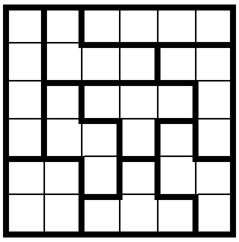
Какой может быть площадь квадрата, сложенного из четырехклеточных фигурок?

Решение

Площадь оставшихся фигур будет меньше в том случае, когда больше площадь сложенного квадрата.

Суммарная площадь всех фигурок Антона равна $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ (кл.), значит, площадь квадрата не больше 40 клеток. Наибольшее число, которое не больше 40 и является квадратом натурального числа — 36.

Осталось проверить, можно ли сложить квадрат со стороной 6 из имеющихся фигурок. Приведём возможный пример разрезания.



Получили, что квадрат 6×6 составить можно, для этого нужно 9 фигурок. В этом случае незадействованной остается 1 фигурка.

Ответ: 1 фигурка