Занятие 20. Шахматная раскраска

Предметные цели

1. Формировать навык использования шахматной раскраски досок для оценок и доказательств.
2. Тренировать умение использовать свойства чередования при решении задач.

Учебное содержание

Задача-ключ

На клетке $a1$ доски 8×8 стоит конь. Может ли конь сделать ровно 15 ходов и в итоге снова оказаться на клетке $a1$?

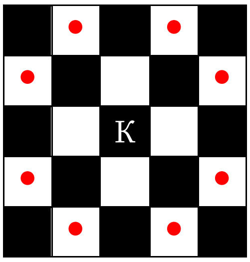
Подсказка

1. Раскрасьте доску в шахматном порядке.
2. Посмотрите, как цвет поля, на котором стоит конь, зависит от количества сделанных им ходов.

Решение

Раскрасим доску в шахматном порядке[1] так, чтобы клетка $a1$ оказалась черной. Тогда в начале конь стоит на черной клетке. Докажем, что цвета клеток, которые посещает конь, чередуются. Это можно объяснить, например, двумя следующими способами:

1-*й способ*



Рассмотрим всевозможные варианты ходов коня из какой-то клетки на доске с шахматной раскраской. Заметим, что все его ходы ведут на клетки противоположного цвета. (Какие-то ходы могут быть невозможны из-за того, что находятся за границей доски, но это не влияет на цвет конечных клеток доступных ходов).

2-*й способ*

Ход коня представляет собой смещение на две клетки в какую-то сторону, а затем смещение на одну клетку в перпендикулярном направлении. Таким образом конь делает за один ход три смещения, и каждое из них происходит в соседнюю по стороне клетку. Так как при переходе в соседнюю клетку цвет клетки, на которой стоит конь, меняется на противоположный, то после третьего смещения цвет клетки будет противоположен цвету клетки, в которой конь начал ход.

Итак, цвета клеток, на которых находится конь, чередуются: Ч, Б, Ч, Б, … Тогда после каждого нечетного хода (1-го, 3-го, 5-го и так далее) конь будет стоять на белой клетке, а после каждого четного (2-го, 4-го, 6-го и так далее) — на черной. Так как 15 — нечетное число, после 15-го хода конь окажется на белой клетке, и это не может быть клетка $a1$, так как она черного цвета. Значит, конь не может вернуться в начальную клетку.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) Раскрасим доску в шахматном порядке.

2) Цвета клеток, на которые попадает конь в процессе обхода, чередуются.

3) 15 — нечетное число, поэтому начальная и конечная клетки разного цвета ⇒ Не может вернуться в изначальную клетку.

Ответ: нет, не может.

[1] Рекомендуется обратить внимание детей на свойства шахматной раскраски: клетки, имеющие общую сторону, разного цвета; все клетки на одной диагонали имеют один цвет; соседние диагонали разного цвета (это диагональная раскраска в 2 цвета).

Советы по решению задач с помощью раскраски

1. В задачах на доказательство можно использовать шахматную раскраску. При такой раскраске в 2 цвета соседние объекты (клетки, точки, и так далее) — разного цвета.
2. Если двигаться по доске, чередуя цвет клеток, то вернуться в исходную клетку можно только сделав четное число ходов.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. Есть ли в этой задаче какой-то процесс?
2. Сколько ходов в этом процессе?
3. Как может выглядеть один ход?
4. Что изменяется за один ход этого процесса? Как можно это обозначить?
5. Что сохраняется в ходе процесса?

Основные задания

1. Разрезание доски (4 мин)

Вася вырезал из прямоугольной доски 5 × 9 пять клеток: четыре угловые и одну центральную. Какое наибольшее количество плиточек из двух клеток можно вырезать из оставшейся части доски? Покажи пример возможного разрезания и докажи, что больше плиточек вырезать не получится.

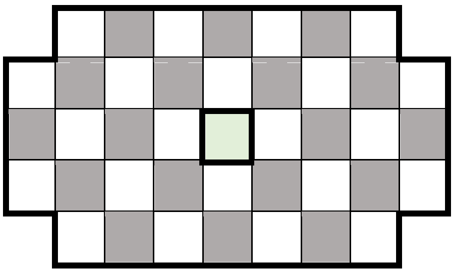
Подсказка

1) Раскрась оставшуюся после вырезания клеток часть доски в шахматном порядке. Сколько черных и сколько белых клеток получилось?

2) Что можно сказать о цвете клеток одной плитки?

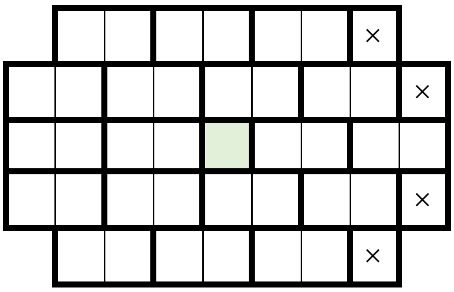
Решение

Всего в доске осталось 45 – 5 = 40 клеток. Раскрасим клетки в шахматном порядке как на рисунке:



Оценим количество плиточек сверху. На оставшейся части доски 18 черных и 22 белых клетки. Каждая плиточка занимает ровно 1 белую и ровно 1 черную клетку, значит всего плиточек можно вырезать не больше, чем на доске черных клеток, то есть не более 18.

Приведем пример вырезания ровно 18 плиточек (крестиками отмечены оставшиеся клетки):



Запись на доске и в рабочей тетради

1) Раскрасим оставшиеся клетки доски в шахматном порядке, как на рисунке. Посчитаем черные и белые клетки (по строкам).

2) $4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 22$ (кл.) — белых на доске

3) $3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 18$ (кл.) — черных на доске

Каждая плиточка занимает 1 черную и 1 белую клетки ⇒ Всего плиточек не больше, чем клеток каждого цвета ⇒ Всего не больше 18 плиточек.

Возможный пример вырезания 18 плиточек — на рисунке.

Ответ: 18 плиточек.

2. Обход доски (4 мин)

Можно ли, поставив коня на некоторую клетку доски 9×9, обойти им всю доску, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, и вернуться в изначальную клетку?

Подсказка

Посчитай, сколько ходов должен сделать конь, чтобы побывать в каждой клетке ровно по одному разу и вернуться в изначальную клетку.

Решение

Раскрасим доску в шахматном порядке. Заметим, что цвета клеток, на которых оказывается конь, чередуются. Тогда после каждого нечетного хода конь будет стоять на клетке цвета, противоположного цвету изначальной клетки, а после каждого четного — на клетке того же цвета, что и изначальная. Чтобы обойти всю доску и вернуться в изначальную клетку, коню необходимо сделать $9 \cdot 9 = 81$ ход (так как он должен сделать по одному ходу в каждую клетку доски) — это нечетное число. Если изначально конь стоял на белой клетке, то после 81-го хода он окажется на черной, а если изначально конь стоял на черной клетке, то после 81-го хода он окажется на белой. Таким образом, после 81 хода конь не могут вернуться в изначальную клетку.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) Раскрасим доску в шахматном порядке.

2) Цвета клеток, на которых оказывается конь, чередуются.

3) $9 \cdot 9 = 81$ (х.) — нужно, чтобы обойти доску и вернуться

4) 81 — нечетное число, поэтому начальная и конечная клетки разного цвета ⇒ Конь не может вернуться в изначальную клетку.

Ответ: нет.

3. Прыжки по прямой (4 мин)

На прямой сидит кузнечик. Он может прыгать вправо или влево по прямой, причем длина прыжка с каждым ходом увеличивается:

а) первым ходом он прыгает на 1 метр, вторым — на 3 метра, третьим — на 5 и так далее;

б) первым ходом он прыгает на 1 метр, а каждый следующий прыжок в два раза больше, чем предыдущий.

Может ли кузнечик после нескольких прыжков снова оказаться в исходной точке?

Подсказка для пункта а)

Обрати внимание, что кузнечик может прыгать также и в точки, расположенные левее точки «старта».

Подсказка для пункта б)

Красить в шахматном порядке можно не только доски. Раздели прямую точками на отрезки длиной 1 м, начиная с точки, в которой сидит кузнечик, и примени раскраску.

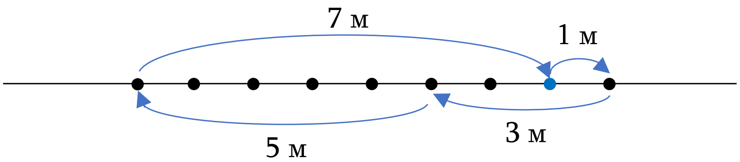
Решение

а) Да, это возможно. Приведем один из примеров. Пусть кузнечик прыгнет сначала на 1 м вправо, а потом на 3 м влево. Так он окажется в точке на расстоянии 2 м левее изначальной. Теперь пусть он прыгнет на 5 м влево, а затем — на 7 метров вправо. Тогда он окажется в изначальной точке.

б) Нет, он не может оказаться в исходной точке ни за какое число прыжков. Докажем это. Отметим на прямой точку O, в которой изначально сидел кузнечик. Затем по обе стороны от точки O отметим еще несколько точек через 1 м друг от друга. Раскрасим точку O в белый цвет, соседние с ней точки — в черный, их соседей снова в белый, и так далее. Заметим, что изначально кузнечик сидел в белой точке, а после первого прыжка оказался в черной точке. Длина всех его последующих прыжков — четная (так как длина прыжка каждый раз умножается на 2). Делая прыжок четной длины с черной точки, кузнечик снова попадает на черную точку. Таким образом, в любой момент, кроме стартового, кузнечик будет оказываться в точках черного цвета, а значит, никогда не сможет вернуться в исходную точку, имеющую белый цвет.

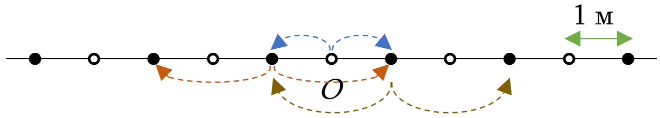
Запись на доске и в рабочей тетради

а) Возможный пример:



б) 1-й прыжок: 1 м, 2-й прыжок: $1 \cdot 2 = 2$ м, 3-й прыжок: $2 \cdot 2 = 4$ м, …

Каждый следующий прыжок вдвое длиннее предыдущего ⇒ Длина всех прыжков, начиная со 2-го, четна.



Покрасим точки в черный и белый цвета, чтобы цвета чередовались.

Сначала кузнечик находится в белой точке, после 1-го прыжка будет на черной точке, все последующие прыжки — четной длины. Точки, расположенные на расстоянии в четное число метров, имеют одинаковый цвет ⇒ Кузнечик будет прыгать дальше только по черным точкам ⇒ Он не сможет вернуться в начальную точку (белую).

Ответ: а) да; б) нет.

4*. Мастерица (4 мин)

Лена сшила квадратное одеяло из 25 одинаковых по размеру квадратных лоскутков. На каждый лоскуток она пришила цветок из ткани. Спустя некоторое время Лена захотела изменить дизайн одеяла, и для этого она переместила каждый цветок на соседний по стороне лоскуток (на некоторых лоскутках могло оказаться по несколько цветков).

а) Докажи, что в новом дизайне хотя бы на одном лоскутке нет ни одного цветка.

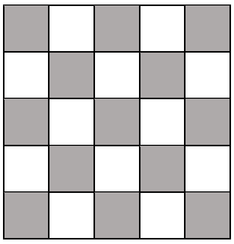
б) Верно ли, что такой лоскуток всего один?

Подсказка

1) Представь, что лоскутки раскрашены в два цвета (например, черный и белый) и расположены в шахматном порядке. Сколько получится лоскутков каждого цвета?

2) Пусть цветок был на белом лоскутке. На лоскутке какого цвета он окажется после перемещения?

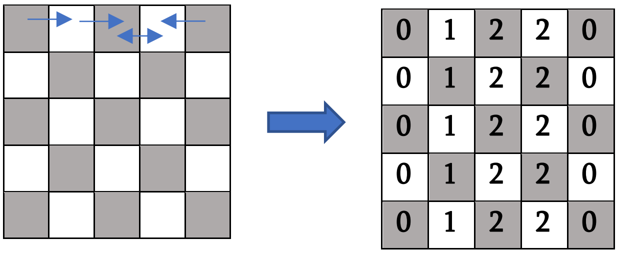
Решение



Из 25 одинаковых квадратных лоскутков можно составить только квадрат, вдоль стороны которого 5 лоскутков.

а) Пусть лоскутки двух цветов и расположены в шахматном порядке так, как показано на рисунке. Всего 12 белых и 13 черных лоскутков. Так как соседние по стороне лоскутки — разного цвета, каждый цветок, который был на белой клетке, в итоге оказался на черной, и наоборот. Но 12 цветков с белых лоскутков могут «занять» не более 12 черных лоскутков, и значит хотя бы один лоскуток окажется без цветка.

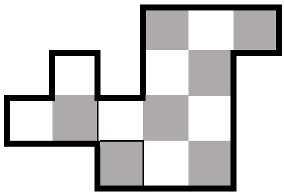
б) Лоскутков без цветка может быть больше одного, если некоторые цветки окажутся на одном лоскутке. Один из возможных примеров — на рисунке (в первой строке исходного одеяла стрелками показано направление перемещения цветков, в других строках перемещение такое же). На новом одеяле числами обозначены количества цветков на каждом лоскутке.



Ответ: б) нет.

Тренировочные задания

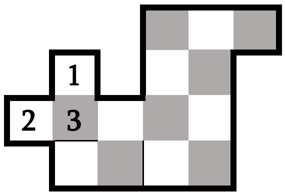
1т. Невозможное разрезание



На рисунке изображена фигура, в которой одинаковое число белых и черных клеток. Докажи, что несмотря на это, такую фигуру нельзя разрезать на плиточки из двух клеток.

Решение

Попробуем разрезать фигуру на плиточки 1×2 (см. рис.).



1) Начнем с клетки 1. Ее можно накрыть только вертикальной плиточкой, содержащей также клетку 3.

2) Клетку 2 можно накрыть только горизонтальной плиточкой, содержащей также клетку 3.

Одна и та же клетка 3 не может быть накрыта двумя разными плиточками ⇒ Доску нельзя разрезать.

Замечание

Сделаем общий вывод про возможность разрезания клетчатой фигуры на плиточки из двух клеток. Если раскрасить фигуру в шахматном порядке и клеток двух цветов не поровну, то ее нельзя разрезать на такие части. Если же клеток двух цветов оказалось поровну, это еще не значит, что фигуру можно разрезать требуемым образом.[2]

[2] Часто в задачах с клетчатыми досками нужно попробовать разные раскраски, и только какая-то из них будет, например, подходить для доказательства невозможности какого-либо разрезания.

2т. Странствующий рыцарь

Толя изготовил новую шахматную фигуру *рыцарь*. Эта фигура может делать ходы на 1 клетку по вертикали или горизонтали или прыгать через 2 клетки по горизонтали. Толя поставил рыцаря на поле $a1$ шахматной доски. Можно ли обойти этой фигурой всю доску, побывав в каждой клетке ровно по одному разу, и закончить путь на поле $h8$?

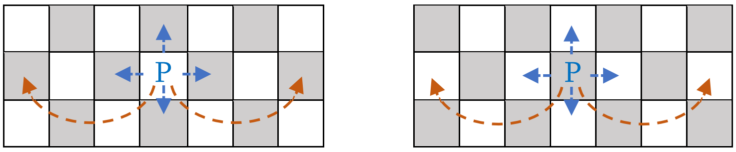
Решение

Рассмотрим шахматную раскраску доски. Цвета клеток, которые проходит рыцарь, чередуются. Тогда после каждого нечетного хода рыцарь будет стоять на клетке цвета, противоположного цвету изначальной клетки, а после каждого четного — на клетке того же цвета, что и изначальная. Чтобы обойти всю доску, рыцарю необходимо сделать $8 \cdot 8 - 1 = 63$ хода (так как он должен сделать по одному ходу в каждую клетку доски, кроме стартовой) — это нечетное число. Значит, после 63 ходов рыцарь должен оказаться на клетке противоположного цвета, чем изначальная.

Но поля $a1$ и $h8$ находятся на одной диагонали, то есть они одного цвета. Значит, рыцарь не может закончить путь на поле $h8$.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) Рассмотрим шахматную раскраску доски. Цвета клеток, которые проходит рыцарь, чередуются (см. рис.).



2) $8 \cdot 8 - 1 = 63$ (х.) — нужно, чтобы обойти все клетки доски, кроме начальной

3) Поля $a1$ и $h8$ одного цвета.

4) 63 — нечетное число, поэтому начальная и конечная клетки разного цвета ⇒ Рыцарь не может закончить путь на поле $h8$.

Ответ: нет.

3т. Кузнечик на окружности

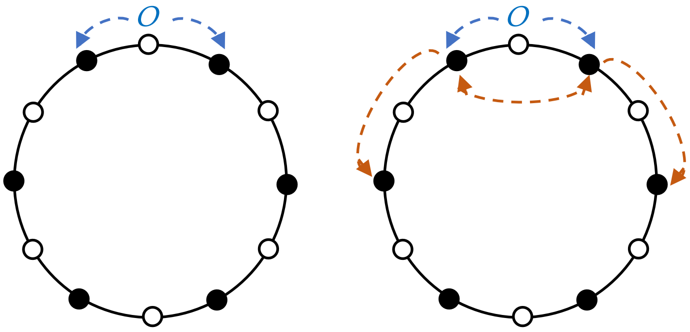
На окружности длиной 12 метров через равные промежутки расположены 12 точек. В одной из них находится кузнечик. Он может прыгать по окружности в направлении движения часовой стрелки или против него, причем первым ходом он прыгает на соседнюю точку, а каждым следующим — через одну точку. Может ли он после нескольких прыжков снова оказаться в исходной точке?

Решение

Пусть O — точка, в которой изначально находится кузнечик. Покрасим ее в белый цвет, а ее соседей — в черный. Теперь всех соседей черных точек покрасим в белый цвет, а соседей белых точек — в черный. Так как всего точек 12, то нам удастся покрасить все точки так, чтобы цвета чередовались. Прыгнув первый раз, кузнечик окажется в точке, соседней с точкой O, то есть в точке черного цвета. Дальше кузнечик прыгает через одну точку, а точки через одну одинакового цвета. Значит, в дальнейшем кузнечик может оказываться только на точках черного цвета, и уже не сможет вернуться в исходную точку, так как она белого цвета.

Запись на доске и в рабочей тетради

Раскрасим точки в шахматном порядке (кузнечик стартует в белой точке O):



1-й прыжок 2-й прыжок

После 1-го прыжка кузнечик будет на черной точке.

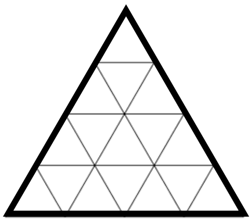
Остальные прыжки будут через одну точку, а точки через одну одного цвета ⇒ Кузнечик всегда будет оказываться на точках черного цвета ⇒ Он не сможет вернуться в точку *O* (она белого цвета).

Ответ: нет.

Замечание

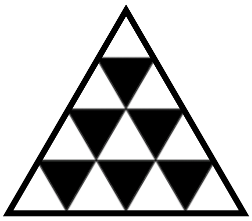
Вместо раскраски в два цвета можно пронумеровать точки числами от 1 до 12, начиная с той, на которой изначально сидел кузнечик. Тогда после первого прыжка он окажется на точке с номером 2 или с номером 12, то есть на точке с четным номером. В круге четность номеров чередуется, поэтому далее при прыжках через одну точку кузнечик будет оставаться на точках с четным номером. Поэтому он не сможет вернуться в точку с нечетным номером 1.

4т*. Заводные солдатики



У Сергея есть доска, состоящая из 16 равных треугольников (см. рис.). На каждый из них Сергей поставил по игрушечному заводному солдатику. По нажатию кнопки каждый солдатик перешел в соседний по стороне треугольник. Докажи, что теперь на доске есть хотя бы 4 пустых треугольника.

Решение



Раскрасим доску так, как показано на рисунке. Всего на доске теперь 10 белых треугольников и 6 черных треугольников. Заметим, что солдатики с белых треугольников перейдут на черные, а солдатики с черных треугольников перейдут на белые. Тогда на 10 белых треугольниках окажутся 6 солдатиков, перешедших с черных треугольников, а значит хотя бы 4 треугольника останутся пустыми.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) Раскрасим треугольники доски в шахматном порядке (см. рис.). Всего будет 10 белых и 6 черных треугольников.

2) Солдатики с белых треугольников перешли на черные и наоборот.

3) 6 солдатиков с черных треугольников могут занять не более 6 белых треугольников ⇒ Хотя бы 4 белых треугольника останутся пустыми.

Замечание

Из этого не следует, что *ровно* четыре треугольника останутся пустыми, их может быть и больше.

Дополнительные задачи

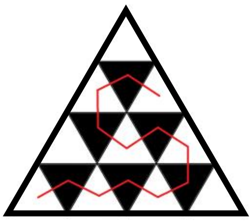
5. Обходя треугольники

Сергей поставил фишку в левый нижний треугольник своей доски (см. задачу 4т*) и стал делать ею ходы, передвигая каждый раз фишку в соседний по стороне треугольник. Какое наибольшее количество треугольников (считая стартовый) он мог обойти таким образом, если фишка не побывала дважды ни в каком треугольнике? Покажи такой путь и объясни, почему фишкой нельзя обойти большее число треугольников.

Подсказка

Попробуй применить шахматную раскраску для данной доски. Что можно сказать о цветах треугольников на пути фишки?

Решение



Раскрасим доску так, как показано на рисунке. Заметим, что при такой раскраске с каждым ходом цвет треугольника, в котором находится фишка, будет меняться на противоположный. Тогда после каждого нечетного хода фишка будет находиться в черном треугольнике, а после каждого четного — в белом. Так как фишка начинает с белого треугольника, а черных треугольников всего 6, то она сможет сделать не более 12 ходов, а значит побывать не более чем в 13 треугольниках (с учетом треугольника, в котором солдатик стоит изначально). Пример пути из 12 ходов приведен на рисунке.

Ответ: 13 треугольников.