Занятие 19. Остатки сладки (Признаки делимости и остатки)

Учебное содержание

Предметные цели

1. Развить знания о делимости и остатках.
2. Познакомить школьников с методом определения остатков от деления по признакам делимости.

Задача-ключ

Найди устно остаток от деления числа 13 246 831 на 4.

Решение

Представим данное число в виде: 13 246 831 = 13 246 800 + 31. Поделим число на 4 и используем распределительное свойство:

$$(13\,246\,800 + 31) : 4 = 13\,246\,800 : 4 + 31 : 4.$$

По признаку делимости на 4 первое слагаемое является целым числом. Второе слагаемое дает остаток 3 при делении на 4. Значит, исходное число также давало остаток 3 при делении на 4.

Ответ: 3.

Свойства чисел, связанные с остатками

1. Сумма числа, кратного некоторому числу n, и числа, имеющего остаток r при делении на это число n, дает остаток r при делении на n.
2. Остаток от деления числа на 4 равен остатку от деления на 4 двузначного числа, образованного его двумя последними цифрами.
3. Остаток от деления числа на 3 (на 9) равен остатку от деления на 3 (на 9) его суммы цифр.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. О делимости и остатках от деления на какие числа идет речь в задаче?
2. Каков признак делимости на эти числа? Что можно сказать об остатке?

Как проверить

1. Частными случаями (когда остаток равен нулю) этих свойств чисел являются свойства и признаки делимости, изученные ранее.
2. Для проверки гипотезы можно её проверить на нескольких частных случаях. Для доказательство соответствующего свойства проверки некоторых случаев недостаточно.

Основные задания

1. Сложение и вычитание (4 мин)

Тамара написала на доске число 100. За один раз число, записанное на доске, можно либо увеличивать на 8 или 24, либо уменьшать на 16. Может ли через некоторое время на доске оказаться число 123 456?

Подсказка

Каким общим свойством обладают числа 8, 16 и 24?

Решение

1-*й способ (остатки)*

Числа 8, 16 и 24 делятся на 8. При прибавлении или вычитании числа, делящегося на 8, не изменяется его остаток от деления на 8. В начале на доске было записано число 100, дающее остаток 4 при делении на 8. Значит, все числа на доске будут иметь остаток 4 при делении на 8. Но число 123 456 делится на 8. Значит, оно не может оказаться на доске.

2-й способ (делимость)

Предположим, что число 123 456 может оказаться на доске через какое-то время. Так как все числа 8, 16 и 24 делятся на 8, то изначальное число увеличилось на некоторое число, делящееся на 8. Тогда разность 123 456 и 100 должна делиться на 8, но 123 456 – 100 = 123 356 не делится на 8.

Ответ: нет.

2. Расстановка (4 мин)

Докажи, что все натуральные числа от 1 до 7 нельзя расставить в ряд так, чтобы любое двузначное число, образованное двумя подряд идущими цифрами, при делении на 3 давало остаток 1.

Подсказка

Догадайся, для какого числа меньше всего возможных вариантов соседей.

Решение

Заметим, что число 2 может стоять в ряду только с 5. Проверим это:

Сосед	1	3	4	5	6	7
Число	12 или 21	23 или 32	24 или 42	25 или 52	26 или 62	27 или 72
Остаток	0	2	0	1	2	0

И наоборот, число 5 может стоять только с 2. Значит, если в ряду есть число 2, то такой ряд может содержать только две цифры: 52 или 25. Значит, расставить все числа в ряд нельзя.

Замечание

Так как остаток от деления на 3 числа равен остатку от деления на 3 его суммы цифр, то задачу поиска «соседа» для числа 2 можно заменить задачей поиска такого числа из данных, которое при сложении с 2 дает остаток 1 при делении на 3. В силу арифметических свойств остатков это может быть только число, также дающее остаток 2 при делении на 3 (в сумме с числом, делящимся на 3, будет получаться число с остатком 2, а в сумме с числом, дающим остаток 1 при делении на 3 получится число, делящееся на 3). Но среди остальных чисел от 1 до 7, кроме 2, только одно дает остаток 2 при делении на 3 — это 5. Те же рассуждения можно провести и с числом 5.

3. Делим по-честному (5 мин)

Марина испекла некоторое количество блинчиков. Если она попробует раздать блинчики поровну всем своим пяти куклам, то у нее останется два блинчика, а если только четырем, то останется один лишний блинчик. Какое наименьшее количество блинчиков могла испечь Марина?

Подсказка

Сколько блинчиков нужно допечь Марине, чтобы их количество поровну разделилось на пятерых кукол? А на четверых?

Решение

1-*й способ (остатки)*

Для того, чтобы получилось число, делящееся на 5, нужно добавить 3 блинчика.

Для того, чтобы получить число, делящееся на 4, нужно тоже добавить 3 блинчика.

Значит, если Маша допечет 3 блинчика, то общее число блинчиков будет делиться и на 4, и на 5. Такое наименьшее число — это 20. Значит, Маша испекла не менее, чем 20 – 3 = 17 блинчиков.

2-*й способ (метод перебора)*

Чтобы найти наименьшее количество, которое могло быть, будем последовательно перебирать числа, дающие остаток 2 при делении на 5, и проверять, дают ли они остаток 1 при делении на 4..

Число 5k+2	**Остаток при делении на 4**
2	2
7	3
12	0
17	1

Запись на доске и в рабочей тетради

1-*й способ*

1) $n + 3 \ \vdots\, 5, n + 3 \ \vdots\, 4.$

2) НОК(4, 5) = 20. ⇒ $n + 3 \vdots 20$.

3) 20 — наименьшее натуральное число, которое делится на 20.

4) 20 – 3 = 17 (бл.)

2-*й способ*

Число 5k+2	**Остаток при делении на 4**
2	2
7	3
12	0
17	1

Ответ: 17 блинчиков.

4*. Долгие вычисления (5 мин)

Дима записал в тетради число 13246798, вычел из него сумму цифр этого числа и записал результат в тетради. Затем из полученного числа опять вычел сумму его цифр и записал новый результат. После большого количества таких действий он получил число 8. Докажи, что Дима ошибся в вычислениях.

Подсказка

Вспомни, какие признаки делимости связаны с суммой цифр числа.

Решение

Остаток от деления числа на 3 равен остатку от деления суммы его цифр от деления на 3. Разность двух чисел с одинаковым остатком от деления на 3 будет делиться на 3. Это значит, что уже после первого вычитания останется число, которое делится на 3. Дальше все выписанные числа будут делиться на три как разность двух чисел, делящихся на 3. Значит, Женя не могла получить число 8, так как оно не делится на 3.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) Обозначим за S_n сумму цифр числа n.

2) Остаток от деления числа S_n на 3 равен остатку от деления числа n на 3.

3) $n - S_n \vdots 3$.

4) 8 не делится на 3, значит, Дима ошибся.

Тренировочные задания

1т. Сложение и вычитание

На необычном калькуляторе есть три дополнительные кнопки: «&» увеличивает число на 15, «*» – уменьшает число на 42 и «@» – увеличивает число на 27. Паша ввел на калькуляторе число 925. Может ли он нажимая только 3 дополнительные кнопки, получить число 0?

Решение

1-*й способ (остатки)*

15, 27, 42 ⋮ 3. ⇒ Остаток числа от деления на 3 не меняется.

925 дает остаток 1 при делении на 3, 0 делится на 3. ⇒ Саша не получит число 0.

2-*й способ (делимость)*

Предположим, что число 0 можно получить.

15, 27, 42 ⋮ 3. ⇒ Число на калькуляторе уменьшилось на число, делящееся на 3.

(925 – 0) = 925, но 925 не делится на 3. Противоречие. Значит, число 0 получить нельзя.

Ответ: нет.

2т. Расстановка

Расставь числа от 1 до 8 в ряд так, чтобы любое двузначное число, образованное двумя подряд идущими цифрами, кроме одного, делилось на 3.

Решение

Например, можно расставить числа так: 12457836.

Проверка: все числа 12, 24, 45, 57, 78 и 36 делится на 3, а число 83 — не делится.

Путь к решению

Заметим, что число 3 может давать двузначное число, делящееся на 3, только с 6. Но у каждого числа в ряду, кроме крайних, по 2 соседа. Значит, одно из чисел 3 или 6 должно стоять с краю, а второе рядом с ним, причем оно образует с соседом единственное двузначное число, не делящееся на 3.

Теперь рассмотрим, например, число 1. Оно образует число, делящееся на 3, рядом с 2, 5 и 8. С теми же числами образует делящееся на 3 числа 4 и 7. Значит, числа двух групп {1, 4, 7} и {2, 5, 8} должны чередоваться. Так и получается подходящий пример.

3т. Делим по-честному

К Тане в гости собираются прийти то ли 4, то ли 5, то ли 6 гостей. У нее есть мешочек конфет. Она посчитала, что если придут четверо, то она сможет съесть 3 конфеты и раздать гостям оставшееся поровну. Если придут пятеро, то она сможет так же съесть 4 конфеты, а если шестеро – то 5 конфет. Сколько конфет может быть в мешочке у Тани, если их меньше 100? К Вике собираются прийти то ли 4, то ли 5, то ли 6 гостей. У неё есть мешочек конфет. Она посчитала, что если придут четверо, то она сможет съесть 3 конфеты и оставшиеся раздать гостям поровну. Если придут пятеро, то она сможет съесть 4 конфеты, а если шестеро — то 5 конфет, раздавая каждый раз оставшиеся конфеты поровну. Сколько конфет может быть в мешочке у Вики, если их меньше 100?

Решение

1-*й способ*

Пусть n — число конфет в мешочке у Вики.

1) $n + 1 \ \vdots 4, 5, 6.$

2) НОК(4, 5, 6) = 60.

3) $n + 1 = \{60, 120, \dots\}$

4) $n < 100. \Rightarrow n = 59.$

2-*й способ*

Пусть n — число конфет в мешочке у Тани.

1) Так как n дает остаток 3 при делении на 4, то n — нечетное число.

2) Так как n дает остаток 4 при делении на 5, то n может оканчиваться на 4 или 9.

3) $n = \{9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, \dots\}$

4) Наименьшее n, которое дает остаток 5 при делении на 6 — это 59.

Ответ: 59 конфет.

4т*. Долгие вычисления

Никита записал в тетради двузначное число, меньшее 90, вычел из него сумму цифр и записал результат. После этого он вычел из результата новую сумму цифр и снова записал результат. После пяти таких вычитаний получилось однозначное натуральное число. а) Приведи пример числа, которое могло быть записано первым. б) Найди как можно больше таких чисел.

Решение

Подходят все числа от 50 до 59 включительно. Проверим одно из них.

Проверка: 1) 50 – (5 + 0) = 45, 2) 45 – (4 + 5) = 36, 3) 36 – (3 + 6) = 27, 4) 27 – (2 + 7) = 18, 5) 18 – (1 + 8) = 9.

Заметим, что у всех двузначных чисел, начинающихся с 5, после первого действия будет получаться 45, значит все следующие операции дадут тот же результат, что и с числом 50.

Ответ: любое число от 50 до 59 включительно.

Путь к решению

Как понять, что другие числа не подходят:

Разность числа и его суммы цифр делится на 9. Значит, все записанные Колей числа (кроме 1-го) делятся на 9. Тогда все их суммы цифр делятся на 9. Числа меньше 90, значит все эти суммы цифр могут быть равны только 9.

Последнее выписанное число однозначно и делится на 9, следовательно, это 9. Применим «обратный ход»: 5) 9 + 9 = 18, 4) 18 + 9 = 27, 3) 27 + 9 = 36, 2) 36 + 9 = 45.

Подходящие варианты 1-го числа можно найти методом перебора (сумма его цифр не более 17, поэтому перебирать нужно только от 45 до 45 + 17 = 62).

Дополнительные задания

5. Карандаши

На столе лежало шесть наборов из 15, 16, 18, 19, 20 и 31 цветного карандаша. Костя и Слава забрали 5 наборов и поделили все карандаши из них между собой так, что Косте досталось ровно в 2 раза больше карандашей, чем Славе. Набор из скольких карандашей мог остаться лежать на столе?

Подсказка

Что можно сказать о суммарном количестве карандашей в наборах у Кости и Славы?

Решение

Если Славе досталось n карандашей, то Косте — $2n$ карандашей. В сумме у мальчиков окажется $3n$ карандашей, то есть число, делящееся на 3. Всего на столе было 15 + 16 + 18 + 19 + 20 + 31 = 119 карандашей, это число дает остаток 2 при делении на 3.

Из всех наборов только в наборе из 20 карандашей остаток равен 2. Значит, он и остался на столе.

Ответ: из 20 карандашей.