

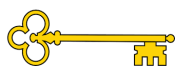
Занятие 18. Оценки сверху и снизу

Учебное содержание

Предметные цели

1. Тренировать умение строить отрицания высказываний, связанных с оценками («больше», «меньше», «меньше или равно», «больше или равно»), высказываний о существовании и всеобщности.
2. Познакомить с методом двухсторонней оценки для доказательства единственности ответа или нахождения всех возможных ответов.

Задача-ключ



В стране Лимонии в ходу монеты в 1, 2, 3, ..., 20 лимонов. Житель этой страны пришел в магазин с одной монетой. На эту монету он купил две бутылки лимонада и получил на сдачу три монеты разного достоинства. Житель выпил лимонад и захотел купить еще одну такую бутылку, но понял, что ему не хватит денег. Сколько стоит бутылка лимонада?

Решение

Докажем, что бутылка лимонада стоит не более 7 лимонов (оценка «сверху»). Житель получил на сдачу три монеты разного достоинства, то есть не менее $1 + 2 + 3 = 6$ лимонов. Тогда на две бутылки он потратил не более 14 лимонов, значит, бутылка стоит не более $14 : 2 = 7$ лимонов.

Докажем теперь, что бутылка лимонада стоит не менее 7 лимонов (оценка «снизу»). У жителя оставалось не менее 6 лимонов, и этого не хватило на новую покупку. Значит, бутылка лимонада стоит не менее 7 лимонов.

Итак, мы доказали, что бутылка стоит не менее 7 лимонов и не более 7 лимонов. Значит, она может стоять только ровно 7 лимонов.

Ответ: 7 лимонов.

Замечание

Оценку «снизу» можно получить и по-другому: так как у жителя была изначально только одна монета, это значит, что у него было не более 20 лимонов. При этом жителю не хватило этих денег на покупку 3 бутылок, а значит одна бутылка стоит дороже $20 : 3 = 6$ лимонов.

Советы по решению задач с числовыми оценками

1. Чтобы найти возможные значения неизвестной, которая может принимать натуральные значения, можно сначала доказать, что эта величина меньше или равна какому-то числу (это называют оценкой «сверху»), а затем — что она больше или равна какому-то числу (оценка «снизу»).
2. Для проверки найденных значений неизвестной можно воспользоваться методом перебора.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. О каких количествах идет речь в задаче?
2. Как можно оценить эти значения «сверху» и «снизу»?

Как проверить

Соблюдение оценок можно проверить, подставляя конкретные числа.

Основные задания

1. Девочки и мальчики (3 мин)

В 5 «Ф» классе учатся 30 человек — девочки и мальчики. При этом среди любых 12 учеников этого класса найдется хотя бы одна девочка, а среди любых 21 ученика — хотя бы один мальчик. Сколько мальчиков может быть в 5 «Ф» классе?

Подсказка

Какую оценку на количество **мальчиков** в классе можно дать, зная, что среди любых 12 учеников есть хотя бы одна девочка?

Решение

Так как среди любых 12 учеников найдется хотя бы одна девочка, значит, всего в классе не более 11 мальчиков (иначе можно было бы выбрать группу из 12 мальчиков, в которой бы не нашлось ни одной девочки). Аналогично в классе не более 20 девочек. Всего в классе 30 человек, и все условия могут выполняться, если в классе 11 мальчиков и 19 девочек или 10 мальчиков и 20 девочек.

Запись на доске и в рабочей тетради

- 1) Среди любых 12 учеников есть хоть одна девочка $\Rightarrow M \leq 11, Д \geq 19$ ($30 - 11 = 19$).
- 2) Среди любых 21 ученика есть хоть один мальчик $\Rightarrow Д \leq 20, M \geq 10$ ($30 - 10 = 20$).
- 3) $10 \leq M \leq 11 \Rightarrow M \in \{10, 11\}$.

Ответ: 10 или 11 мальчиков.

Замечание

Важно обратить внимание детей на то, что из условия «среди любых 12 учеников этого класса найдется хотя бы одна девочка» не следует, что мальчиков ровно 11. Данное условие само по себе будет выполняться и в том случае, если мальчиков меньше.

2. Подарки (4 мин)

На день рождения близняшкам Даше и Маше подарили две одинаковые коробки шоколадок. Каждая девочка поделила каждую из своих шоколадок на 2 или 3 части. При этом у Даши получилось 57 кусочков шоколада, а у Маши — 83 кусочка. Сколько шоколадок могло быть в коробке?

Подсказка 1

Подумай, за счет чего у Маши получилось больше кусочков, чем у Даши. На сколько больше?

Подсказка 2

Подумай, какое наименьшее число шоколадок могло быть у Даши, чтобы она смогла их разделить на 57 кусочков.

Решение

1-й способ

У девочек было поровну шоколадок, при этом у Даши оказалось меньше кусочков, значит, Даша поделила больше шоколадок на 2 кусочка, чем Маша. Разница у девочек между количеством шоколадок, разделенных на 2 кусочка, равна $83 - 57 = 28$. Значит, шоколадок всего не менее 28.

III ступень. Занятие 18. Оценки в текстовых задачах

При этом если шоколадок хотя бы 29, то получилось бы не менее $29 \cdot 2 = 58$ кусочков, что больше 57. Значит, шоколадок может быть только 28.

Проверим, что 28 шоколадок могло быть.

1) $2 \cdot 27 + 3 = 57$ (к.) — у Даши

2) $27 \cdot 3 + 2 = 83$ (к.) — у Маши

2-й способ

Заметим, что $57 : 2 = 28$ (ост. 1). Это значит, что всего у девочек было не более 28 шоколадок.

При этом $83 : 3 = 27$ (ост. 2). Это значит, что всего у девочек было не менее 28 шоколадок. Это значит, что шоколадок может быть только 28.

Проверим, что 28 шоколадок могло быть.

1) $2 \cdot 27 + 3 = 57$ (к.) — у Даши

2) $27 \cdot 3 + 2 = 83$ (к.) — у Маши

Ответ: 28 шоколадок.

3. Лентяево (4 мин)

В Лентяевском физико-техническом институте (ЛФТИ) в среду было проведено 5 лекций. Из студентов 824 группы первую лекцию посетили всего 9 человек, вторую — 7 человек, третью — 5 человек, четвертую — 3 человека, а пятую — только 1. При этом все студенты 824 группы, кроме Тимофея, посетили поровну лекций, а Фёдор — на одну лекцию больше. Деканат решил выдать премию студентам, посетившим в этот день 4 или 5 лекций. Получил ли Фёдор премию?

Подсказка 1

Каким было бы общее количество посещений лекций, если бы Фёдор посетил столько же лекций, сколько и его одногруппники?

Подсказка 2

Пусть Фёдор получил премию. Какое наименьшее число лекций он тогда посетил? Какое наименьшее число посещений было у студентов 824 группы?

Решение

1-й способ

1) $9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$ (посещ.) — всего

2) $25 - 1 = 24$ (посещ.) — если бы Фёдор посетил столько же лекций, что и все

3) $24 : n$, где n — число студентов 824 группы.

4) $n = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ (все делители числа 24).

5) $n \geq 9$ (первую лекцию посетили 9 студентов) $\Rightarrow n = 12$ или $n = 24$.

6) $24 : 12 = 2$, $24 : 24 = 1 \Rightarrow$ Фёдор посетил 3 или 2 лекции и не получил премию.

2-й способ

Пусть Тимофей посетил хотя бы 4 лекции. Тогда остальные студенты его группы посетили хотя бы 3 лекции. Так как студентов в группе не менее 9 (первую лекцию посетили 9 студентов), то всего было не менее $3 \cdot 8 + 4 = 28$ посещений лекций, а это больше, чем $9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$. Противоречие. Значит, Фёдор посетил не более 3 лекций и не получил премию.

Ответ: нет.

4*. Наследство (5 мин)

Бедный крестьянин оставил в наследство своим 4 сыновьям — Андрею, Борису, Владимиру и Григорию — 70 монет. Сыновья поделили наследство отца так, что каждый получил хотя бы по

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

III ступень. Занятие 18. Оценки в текстовых задачах

1 монете. При этом Андрей, как старший сын, получил больше всего монет, а Борис и Владимир вместе получили 45 монет. А сколько монет получил Григорий?

Подсказка

Как могли распределиться деньги между Борисом и Владимиром? Как это распределение влияет на количество монет, которое получил Андрей?

Решение

- 1) $70 - 45 = 25$ (м.) — получили Андрей и Григорий вместе
- 2) Если Борис и Владимир вместе получили 45 монет, то кто-то из них получил хотя бы 23 монеты. При этом Андрей получил больше монет, а значит, он получил хотя бы 24 монеты.
- 3) Андрей получил хотя бы 24 монеты, Григорий — хотя бы одну, а вместе они получили 25 монет. Значит, Григорий получил ровно 1 монету.

Ответ: 1 монету.

Тренировочные задания

1т. Что у него в пенале?

В пенале у Вани лежат карандаши и фломастеры, всего 15 штук. Среди любых 6 предметов есть хотя бы один карандаш, а среди любых 11 предметов — хотя бы один фломастер. Сколько карандашей может быть в пенале у Вани?

Решение

Если среди любых 6 предметов есть карандаш, то фломастеров не больше 5, тогда карандашей не меньше $15 - 5 = 10$.

Если среди любых 11 предметов есть фломастер, то карандашей не больше 10. Итак, карандашей не меньше 10 и не больше 10, значит их ровно 10.

Запись на доске и в рабочей тетради

- 1) Среди любых 6 предметов есть хоть один карандаш $\Rightarrow \Phi \leq 5, K \geq 10$ ($15 - 5 = 10$).
- 2) Среди любых 11 предметов есть хоть один фломастер $\Rightarrow K \leq 10$.
- 3) $10 \leq K \leq 10 \Rightarrow K = 10$.

Ответ: 10 карандашей.

2т. Подарки

Всем мальчикам 5 «Д» класса на День защитника Отечества подарили одинаковые наборы конструктора. При этом ребята подсчитали, что в 9 наборах вместе меньше 1000 деталей, а в 10 наборах — больше 1100 деталей. Сколько деталей в одной коробке конструктора?

Решение

Если в десяти наборах больше 1100 деталей, то в одном наборе более 110 деталей. Тогда в девяти наборах более 990 деталей. При этом всего меньше 1000 деталей. В каждом наборе целое число деталей, поэтому число деталей должно делиться на 9. Единственное подходящее число — 999 деталей. Значит, в одном наборе $999 : 9 = 111$ деталей.

Запись на доске и в рабочей тетради

В 10 наборах больше 1100 деталей \Rightarrow В одном наборе больше $1100 : 10 = 110$ деталей \Rightarrow В 9 наборах больше 990 деталей. Но там меньше 1000 деталей.

Число деталей в 9 наборах делится на 9. Единственное подходящее число — 999. Тогда в одном наборе $999 : 9 = 111$ деталей.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Ответ: 111 деталей.

3т. Лентяево

В Лентяевском физико-техническом институте (ЛФТИ) в среду было проведено 5 лекций. В 827 группе всего 5 человек. В среду в сумме у них набралось 20 посещений лекций. При этом один из студентов — Андрей — посетил вдвое больше лекций, чем другой — Яков. Сколько всего лекций посетил каждый из студентов 827 группы?

Решение

1-й способ

1) $5 \cdot 3 = 15$ (посещ.) — максимально может быть у трех студентов, кроме Андрея и Якова

2) $20 - 15 = 5$ (посещ.) — минимально может быть у Андрея и Якова

3) Андрей посетил вдвое больше лекций, чем Яков. $\Rightarrow A = 4, Я = 2$ или $A = 2, Я = 1$. Но подходит только первый случай, так как $2 + 1 = 3 < 5$.

4) $20 - 4 - 2 = 14$ (посещ.) — у всех, кроме Андрея и Якова

5) $14 = 5 + 5 + 4$ (единственный способ).

2-й способ

1) $5 \cdot 5 = 25$ (посещ.) — всего было возможно

2) $25 - 20 = 5$ (пропусков) — сделали студенты группы

3) Андрей посетил вдвое больше лекций, чем Яков $\Rightarrow A = 4, Я = 2$ или $A = 2, Я = 1$. Но подходит только первый случай, так как если $A = 2, Я = 1$, то получается как минимум $(5 - 2) + (5 - 1) = 7$ пропусков.

4) $20 - 4 - 2 = 14$ (посещ.) — у всех, кроме Андрея и Якова

5) $14 = 5 + 5 + 4$ (единственный способ).

Ответ: 2, 4, 4, 5, 5 лекций.

4т*. Наследство

Бедный крестьянин оставил в наследство своим 4 сыновьям — Антону, Борису, Василию и Георгию — 100 монет. Сыновья поделили наследство так, что каждый получил хотя бы по 1 монете. Антон, как старший сын, получил больше всего монет. Могло ли так получиться, что Борис и Василий вместе получили 66 монет?

Решение

1-й способ

Пусть это возможно.

1) $100 - 66 = 34$ (м.) — получили Антон и Георгий

2) Георгий получил хотя бы одну монету $\Rightarrow A \leq 33$ м.

3) $B + В = 66$, тогда $B \geq 33$ или $В \geq 33$. Но тогда Антон не мог получить больше всего монет. Противоречие.

2-й способ

Георгий получил хотя бы одну монету $\Rightarrow A + B + В \leq 99$ м. При этом $A > B, A > В \Rightarrow A > 99 : 3 = 33$ м. Тогда $B + В < 99 - 33$, то есть $B + В < 66$ м \Rightarrow Они не могли получить вместе 66 монет.

Ответ: нет.

Дополнительные задания

5. Голодные коты

Четыре голодных кота — Алик, Барсик, Васька и Гоша — нашли связку из 30 сосисок. Через некоторое время оказалось, все коты съели по целому числу сосисок, причём каждый — хотя бы одну. Алик с Барсиком вместе съели столько же сосисок, сколько Васька с Гошей, а Алик с Васькой — в 6 раз больше, чем Барсик с Гошей. Сколько сосисок съел каждый из котов, если известно, что Гоша съел сосисок меньше всех?

Подсказка

1. Обрати внимание, что на указанный момент могли быть съедены еще не все сосиски.
2. Какую часть всех сосисок съели Барсик с Гошей?

Решение

Так как Алик с Васькой съели в 6 раз больше сосисок, чем Барсик с Гошей, и все съели целое число сосисок, то общее число съеденных сосисок делится на 7. Кроме того, Барсик с Гошей съели $\frac{1}{7}$ всех сосисок.

Так как Алик с Барсиком съели вместе столько же сосисок, что и Васька с Гошей, то общее число съеденных сосисок четно. Тогда и Барсик с Гошей съели четное число сосисок: 2 или 4 (если бы они вместе съели хотя бы 6 сосисок, то всего было бы не менее 42 сосисок).

При этом Гоша съел хотя бы 1 сосиску, но меньше всех, то есть Барсик съел хотя бы 2 сосиски. Значит, вместе они съели хотя бы 3 сосиски, а значит — 4. Это возможно, только если Гоша съел 1 сосиску, а Барсик — 3 (Барсик съел больше Гоши).

Всего съедено $4 \cdot 7 = 28$ сосисок, значит, Алик с Барсиком съели $28 : 2 = 14$ сосисок. Тогда Алик съел $14 - 3 = 11$ сосисок, а Васька съел $14 - 1 = 13$ сосисок.

Запись на доске и в рабочей тетради

- 1) $A + B = B + G \Rightarrow$ Съедено четное число сосисок.
- 2) $A + B = 6 \cdot (B + G) \Rightarrow A + B + B + G = 7 \cdot (B + G) \Rightarrow A + B + B + G$ делится на 7.
- 3) $B + G =$ четное число, $B + G \leq 4$ ($30 : 7 = 4$ (ост. 2)).
- 4) $G \geq 1, B > G \Rightarrow B \geq 2 \Rightarrow B + G = 4$.
- 5) $G < B \Rightarrow G = 1, B = 3$.
- 6) $4 \cdot 7 = 28$ (с.) — всего съедено
- 7) $28 : 2 - 3 = 11$ (с.) — съел Алик
- 8) $28 : 2 - 1 = 13$ (с.) — съел Васька

Ответ: Алик съел 11, Барсик — 3, Васька — 13, Гоша — 1 сосиску.