Занятие 17. Конструкции с дробями

Учебное содержание

Предметные цели

1. Развивать представления об обыкновенных дробях и их свойствах.
2. Развивать умение строить числовые конструкции на примере задач с дробями.
3. Развивать умение применять методы рациональных вычислений на примере задач с дробями.

Задача-ключ

Расставьте по кругу шесть различных чисел так, чтобы каждое число в круге было равно произведению двух соседних с ним чисел.

Решение

Подойдет такой вариант:

$$
\begin{array}{ccc}
 & 6 & \\
2 & & 3 \\
\frac{1}{3} & & \frac{1}{2} \\
 & \frac{1}{6} &
\end{array}
$$

Проверим:

$$6 = 2 \cdot 3, \qquad 3 = 6 \cdot \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{6}, \qquad \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{6}, \qquad 2 = 6 \cdot \frac{1}{3}.$$

Путь к решению

1-*й способ*

Рассмотрим любое число, равное произведению двух других, например: $6 = 2 \cdot 3$. Поставим их подряд в круг:

$$
\begin{array}{ccc}
 & 6 & \\
2 & & 3
\end{array}
$$

Рассмотрим второго «соседа» числа 3, пусть это число x. Тогда $x \cdot 6 = 3$, то есть $x = 3 : 6 = \frac{1}{2}$.

Аналогично второй «сосед» числа 2 – это y. $y \cdot 6 = 2$, $y = \frac{1}{3}$.

$$
\begin{array}{ccc}
 & 6 & \\
2 & & 3 \\
\frac{1}{3} & & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

Оставшееся число в круге можно найти, перемножив числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$. Это $\frac{1}{6}$. С помощью проверки убеждаемся, что этот вариант подходит под все условия задачи.

2-*й способ*

(Данный способ подойдет для учеников, которые хорошо умеют работать с буквенными выражениями.)

Рассмотрим два числа в круге, обозначим их a, b. Тогда следующее после b число в круге будет равно $\frac{b}{a}$. Следующее число в круге — это $\frac{1}{a}$. Затем идет число $\frac{1}{b}$. Последнее число оставшееся число — это $\frac{a}{b}$. Все сходится. Теперь можно взять в качестве a и b любые числа.

Замечание

Правило умножения обыкновенных дробей используется только в ключевой задаче занятия. Для решения остальных задач занятия достаточно знать только правила сложения и вычитания дробей. Поэтому занятие можно провести и до того, как дети прошли тему «Умножение дробей». Тогда в качестве ключевой можно дать следующую задачу:

Задача-ключ (другой вариант)

На доске дана такая надпись:

1 2 1 3 1 6 = 1

а) Расставьте знаки арифметических действий и скобки так, чтобы получилось верное равенство.

б) Расставьте только знаки арифметических действий так, чтобы получилось верное равенство.

в) Расставьте знаки «+» и «:» так, чтобы получилось верное равенство.

Возможный пример: *1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 6 = 1.*

Советы по построению конструкций с дробями

Дробью будем называть запись вида $\frac{m}{n}$***, где*** $\boldsymbol{m} \in \boldsymbol{N}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}$.

1. Если сразу придумать пример с несколькими числами не получается, то можно попробовать расставить первые числа произвольным образом (наугад).

Вопросы для построения подводящего диалога

1. О каких числах идет речь в задаче? Целые они или дробные? Сколько их?
2. Где «узкое место» задачи: с расстановки каких чисел удобно начать?
3. Есть ли в задаче числовое выражение с дробями, значение которого нужно вычислить? Как это сделать удобным способом?

Как проверить

Подсчет значения числового выражения с дробями можно проверить вторым способом.

Основные задания

1. Одинаковые знаменатели (5 мин)

а) Игорь написал на доске все правильные дроби со знаменателем 20. Чему равна сумма всех дробей, написанных Игорем?

б*) Надя написала на доске все правильные дроби с натуральными числителями и одинаковым натуральным знаменателем. Сумма всех полученных дробей оказалась равной 50. Чему равен знаменатель всех Надиных дробей?

Подсказка 1

Воспользуйся формулой суммы первых нескольких натуральных чисел.

Подсказка 2

Пусть Игорь выписал дроби в порядке возрастания. Сколько всего дробей выписано? Найди сумму первой и последней выписанных дробей.

б) См. подсказку 1 к пункту а).

Решение

а) Вспомним, что правильными называются дроби, у которых числитель меньше знаменателя. Так как числители всех дробей по условию — натуральные числа, а знаменатели — 20, то в числителе может быть любое число от 1 до 19 включительно. Значит, нужно вычислить сумму

$$\frac{1}{20}+\frac{2}{20}+\frac{3}{20}+\cdots+\frac{19}{20}$$

1-*й способ*

Так как знаменатели всех дробей равны, то можно привести их все к общему знаменателю:

$$\frac{1+2+3+\cdots+19}{20}=?$$

Вспомним формулу суммы нескольких первых чисел. Сумма в числителе равна $19\cdot 20:2=190$. Получится дробь $\frac{190}{20}=\frac{19}{2}=9\frac{1}{2}$.

2-*й способ*

Выпишем все дроби в порядке возрастания (числителей). Всего 19 дробей, разобьем их на пары так: первая — с последней, вторая — с предпоследней, и так далее. Сумма дробей в первой паре $\frac{1}{20}+\frac{19}{20}=1$, а во всех последующих парах числитель первой дроби на 1 больше, чем у предыдущей, а числитель второй дроби на 1 меньше, чем у предыдущей, поэтому сумма дробей не изменяется.

Итак, получится 9 пар, в каждой из которых сумма равна 1. Одно число «в середине» останется без пары — это число $\frac{10}{20}$ (это легко проверить, потому что оно давало бы сумму 1 только само с собой). Итого получаем $9+\frac{10}{20}=9+\frac{1}{2}=9\frac{1}{2}$.

Запись на доске и в рабочей тетради

1-*й способ*

$$\frac{1}{20}+\frac{2}{20}+\frac{3}{20}+\cdots+\frac{19}{20}=\frac{1+2+3+\cdots+19}{20}=\frac{19\cdot 20:2}{20}=\frac{19}{2}=9\frac{1}{2}$$

2-*й способ*

$$\frac{1}{20}+\frac{2}{20}+\frac{3}{20}+\cdots+\frac{19}{20}=\left(\frac{1}{20}+\frac{19}{20}\right)+\left(\frac{2}{20}+\frac{18}{20}\right)+\cdots+\left(\frac{9}{20}+\frac{11}{20}\right)+\frac{10}{20}=9\frac{1}{2}$$

б*) Пусть знаменатель дроби равен n. Будем действовать по аналогии с первым способом:

$$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}=\frac{1+2+3+\cdots+n-1}{n}=\frac{(n-1)\cdot n:2}{n}=\frac{n-1}{2}$$

По условию значение данной суммы равно 50. Тогда $n-1=50\cdot 2=100$. Отсюда $n=101$.

Ответ: а) $9\frac{1}{2}$; б) 101.

Замечание

То, что ответ в пункте б) подходит, можно показать по аналогии со вторым способом (отличие в том, что 101 — нечетное число, поэтому всего будет четное число дробей, и они все разобьются на пары):

$$\frac{1}{101}+\frac{2}{101}+\cdots+\frac{100}{101}=\left(\frac{1}{101}+\frac{100}{101}\right)+\left(\frac{2}{101}+\frac{99}{101}\right)+\cdots+\left(\frac{50}{101}+\frac{51}{101}\right)=50.$$

Обратите внимание, что этот способ проверки помогает только проверить получившийся ответ, но не доказывает, что данный ответ единственный. Поэтому важно понимать, что если ребенок просто выписал этот ряд чисел (например, получив его методом подбора), то это не будет являться решением задачи. Доказывать единственность ответа для таких попыток решения можно с помощью двусторонних оценок, но в данной задаче эти оценки будут достаточно трудоемкими, и проще вывести детей на предложенное решение задачи.

2. Давайте делиться (5 мин)

В олимпиаде по астрономии участвовало от 5 «Ж» класса 20 детей. За участие в олимпиаде им дали на всех 9 одинаковых шоколадок. Как разделить все эти шоколадки поровну на всех участников олимпиады от 5 «Ж» класса, если каждую шоколадку можно делить не более чем на 5 равных частей? (Разные шоколадки можно делить на разное число частей.)

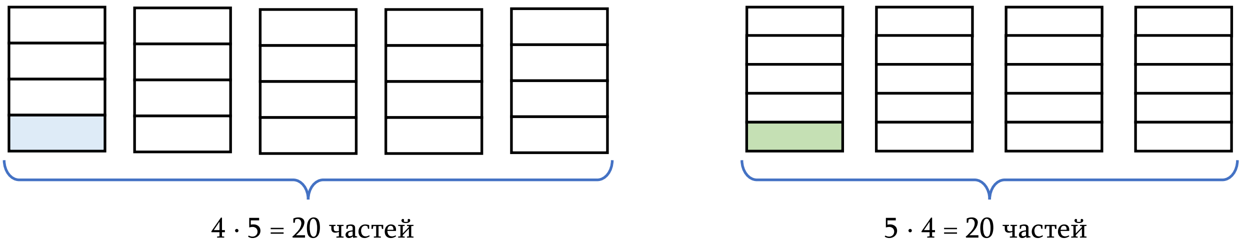
Подсказка

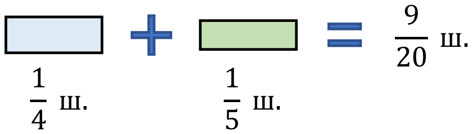
Подумай, какую часть шоколадки должен получить каждый. В сумму каких дробей можно разложить это число?

Вариант ответа

Можно разделить 5 шоколадок на 4 части, и каждому раздать по одной, а оставшиеся 4 шоколадки — на 5 частей, и каждому раздать по одной.

Запись на доске и в рабочей тетради



Каждый получает: 

Путь к решению

Так как всего есть 20 детей и 9 шоколадок, значит, каждый должен получить $9 : 20 = \frac{9}{20}$ шоколадки. Но по условию каждую шоколадку можно делить не более чем на 5 частей, поэтому не получится просто разделить каждую шоколадку на 20 частей и раздать каждому по 9 кусочков. Попробуем представить эту дробь в виде суммы дробей со знаменателями, не большими 5. Заметим, что 20 = 2 · 10 = 4 · 5. Попробуем разложить дробь на сумму двух дробей со знаменателями 4 и 5:

$$\frac{9}{20} = \frac{a}{4} + \frac{b}{5} = \frac{5a + 4b}{20}$$

Видим, что подходит $a = 1, b = 1$, то есть:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{9}{20}.$$

Тогда каждому из 20 детей должно достаться по $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ шоколадки. 20 : 4 = 5, поэтому 5 шоколадок поделим на 4 части и раздадим каждому по одной. Оставшиеся 4 шоколадки делим на 5 частей, получается всего снова 4 · 5 = 20 частей, и каждому раздаем по одной части.

Замечание

Есть и другие способы.

3. Пять дробей (5 мин)

Расставь все числа от 1 до 10 в пустые клетки так, чтобы сумма дробей была целым числом. (Дроби могут быть как правильными, так и неправильными.)

$$\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}$$

Подсказка

Попробуй составить все дроби так, чтобы они были равны целым числам. Поищи «узкие места» — числа, у которых меньше всего вариантов такой расстановки.

Решение

Подойдет, например, такой вариант:

$$\frac{10}{5}+\frac{9}{3}+\frac{8}{4}+\frac{7}{1}+\frac{6}{2}=2+3+2+7+3=17.$$

Путь к решению

Если все дроби будут равны целым числам, то и их сумма будет целым числом, поэтому попробуем расставить числа требуемым образом. Заметим, что среди чисел есть простое число 7. Единственная подходящая дробь с семеркой — это $\frac{7}{1}=7$. Также в ряду есть простое число 5, которое может быть либо в дроби $\frac{10}{5}$, либо в дроби $\frac{5}{1}$, но число 1 уже занято. Итак, уже найдены две дроби: $\frac{7}{1}$ и $\frac{10}{5}$.

Среди оставшихся чисел «узкое место» — это число 9. Так как не осталось чисел больших него, то оно должно стоять в числителе. В знаменатель из оставшихся чисел может пойти только число 3, получится дробь $\frac{9}{3}=3$.

Оставшиеся числа распределяются в две дроби: $\frac{8}{4}$ и $\frac{6}{2}$.

Замечание

Существуют и другие примеры, в том числе и такие, где не каждая дробь равна целому числу:

$$\frac{5}{10}+\frac{7}{2}+\frac{8}{4}+\frac{6}{3}+\frac{9}{1}=17.$$

4. Уменьшение дроби (5 мин)

На флипчарте была написана некоторая дробь. После того как Аркадий прибавил к числителю и к знаменателю этой дроби по 10, получилась новая дробь, которая оказалась меньше, чем изначальная. Приведи свой пример дроби, которая могла быть написана на флипчарте.

Подсказка

Вспомни, какие типы дробей тебе известны.

Решение

Подойдет пример:

$$\frac{5}{2}>\frac{15}{12}=\frac{5}{4}.$$

Путь к решению

Если попробовать провести указанную операцию с несколькими правильными дробями, то можно заметить, что результат всегда больше исходной дроби. При этом если числитель дроби будет равен знаменателю, то дробь не изменится. Это дает возможность предположить, что искать такую дробь можно среди неправильных дробей. Любая неправильная дробь подойдет.

Замечание

Можно доказать[1], что среди правильных дробей такой пример не найдется. Действительно, пусть исходная дробь — это $\frac{a}{b}$. Запишем сравнение:

$$\frac{a}{b} \vee \frac{a+10}{b+10}$$
$$a(b+10) \vee b(a+10)$$
$$ab+10a \vee ba+10b$$
$$10a \vee 10b$$

Если исходная дробь — правильная, то $a < b$ и $10a < 10b$. Значит, при данной операции дробь могла только увеличиться.

Аналогично получим, что любая неправильная дробь ($a > b$) подходит как пример в задаче.

Тренировочные задания

1т. Одинаковые знаменатели

а) Вера написала на доске все правильные дроби с нечетными натуральными числителями и знаменателем 36. Чему равна сумма всех написанных ею дробей?

б*) Гриша написал на доске все правильные дроби с нечётными числителями и одинаковым чётным знаменателем 2n. Оказалось, что сумма всех полученных дробей равна 5. Чему равен знаменатель всех дробей?

Решение

1-*й способ*

$\frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{35}{36} = \frac{1+3+5+\cdots+35}{36}$

В ряду нечетных чисел 1, 3, …, 35 всего 36 : 2 = 18 чисел. Как известно из занятия № 5. «Переверни и сложи», сумма таких чисел равна $18^2 = 324$. Тогда вся сумма равна $\frac{324}{36} = \frac{18}{2} = 9$.

Запись на доске и в рабочей тетради

1-*й способ*

$$\frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{35}{36} = \frac{1+3+5+\cdots+35}{36} = \frac{(18 \cdot 36) : 2}{36} = 9$$

2-*й способ*

$$\frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \cdots + \frac{35}{36} = \left(\frac{1}{36} + \frac{35}{36}\right) + \left(\frac{3}{36} + \frac{33}{36}\right) + \cdots + \left(\frac{17}{36} + \frac{19}{36}\right) = 9$$

б*) Будем действовать по аналогии с первым способом:

$$\frac{1}{2n} + \frac{3}{2n} + \frac{5}{2n} + \cdots + \frac{2n-1}{2n} = \frac{1+3+5+\cdots+2n-1}{2n} = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$$

По условию значение данной суммы равно 5. Тогда $n = 10$. Отсюда знаменатель $2n = 20$.

[1] Данное доказательство приводится только для учителя, так как выходит за рамки программы 5 класса.

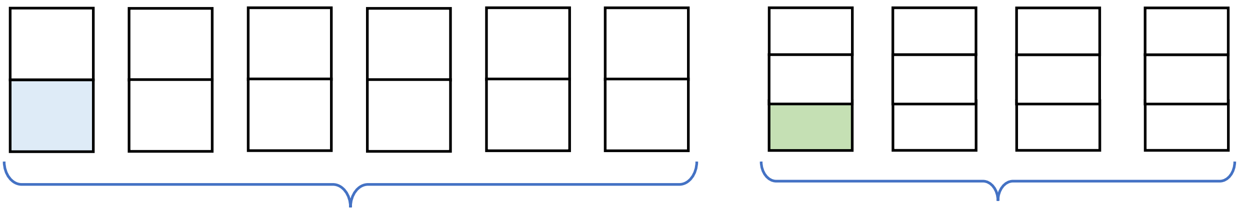
Ответ: а) 9; б) 20.

2т. Давайте делиться

К Кате пришли 12 гостей, а у неё было только 10 одинаковых пирожных прямоугольной формы. Она хочет разделить каждое пирожное не более чем на 4 равные части таким образом, чтобы всем гостям достались одинаковые порции пирожных. Как она может это сделать?

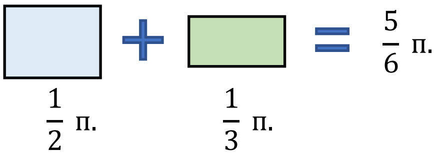
Решение

Разделим 6 пирожных пополам, и раздадим каждому по половине пирожного. Оставшиеся 4 пирожных разрежем на 3 равных части, и каждому раздадим по трети. Всего у каждого окажется равная порция — по $\frac{5}{6}$ пирожного на человека.



$2 \cdot 6 = 12$ частей $\qquad$ $3 \cdot 4 = 12$ частей

Каждый получает:



3т. Пять дробей

У Маши есть 10 карточек с числами от 1 до 5 и от 20 до 24. Она хочет составить из этих карточек 5 дробей так, чтобы их сумма была равна целому числу. Помоги Маше расположить карточки нужным образом.

$$\frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square}$$

Решение

Подойдет такой вариант:

$$\frac{24}{4} + \frac{23}{1} + \frac{22}{2} + \frac{21}{3} + \frac{20}{5} = 12 + 23 + 11 + 7 + 4 = 57.$$

Замечание

Существуют и другие примеры.

4т*. Увеличение дроби

На флипчарте была написана дробь, и числитель, и знаменатель которой больше 20. Аркадий отнял от числителя и знаменателя дроби по 20. При этом получившаяся дробь оказалась больше, чем изначальная. Приведи пример дроби, которая могла быть написана на флипчарте.

Решение

Подойдет пример

$$\frac{50}{30} < \frac{30}{10}, \qquad \text{так как } \frac{50}{30} = 1\frac{2}{3}, \frac{30}{10} = 3$$

Замечание

В качестве примера подойдет любая неправильная дробь, числитель и знаменатель которой больше 20.

Дополнительные задания

5. Шесть дробей

Придумай 6 различных правильных несократимых дробей с натуральными числителем и знаменателем, произведение которых равно $\frac{1}{5}$.

Подсказка

Попробуй составить ряд дробей так, чтобы числитель и знаменатель соседних дробей сокращались.

Решение

Подходят, например, дроби $\frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}$.

Проверка: $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Путь к решению

Можно попробовать выстраивать ряд так, чтобы знаменатель дроби сокращался с числителем следующей дроби (подобная идея помогает в некоторых задачах про длинные ряды дробей).

Если использовать только правильные дроби с числителями не больше, чем 5, то получится не больше 5 дробей. Поэтому можно стремиться получить в результате не $\frac{1}{5}$, а другую равную ей дробь, например $\frac{2}{10}$ или $\frac{3}{15}$.

Замечание

Существуют и другие примеры.