

ЗАНЯТИЕ 15. Сколько нужно взять?

Учебное содержание

Предметные цели

1. Развить умение проводить перебор числовых вариантов.
2. Расширить знания о высказываниях, отрицании высказываний и методе доказательства «от противного».
3. Познакомить с приемом оценки «сверху», основанной на доказательстве «от противного».

Задача-ключ



Мама решила сварить компот, и отправила Митю в подвал за яблоками. В подвале в непрозрачном мешке лежат 50 красных и 50 зеленых яблок. Митя нести яблоки не спешил, а решил сначала поставить несколько мысленных экспериментов.

Эксперимент 1. Какое наименьшее количество яблок Митя должен достать из мешка, чтобы среди них точно нашлись два одноцветных?

Эксперимент 2. Какое наименьшее количество яблок Митя должен достать из мешка, чтобы среди них точно нашлись два красных?

Эксперимент 3.

Какое наименьшее количество яблок Митя должен достать из мешка, чтобы среди них нашлись хотя бы по 15 красных и по 15 зеленых яблок, которые мама просила для компота?

Решение

Эксперимент 1

1-й способ (полный перебор)

Переберем варианты:

1 яблоко

2 яблока

3 яблока

К, З

КК, ЗЗ, КЗ, ЗК

ККК, ККЗ, КЗК, ЗКК, КЗЗ, ЗКЗ, ЗЗК, ЗЗЗ

Если достать 2 яблока, то могут не попасться два одноцветных. А если достать 3 яблока, то среди них всегда есть два одноцветных.

2-й способ («еще не»)

Пусть Митя еще не достал два одноцветных яблока. Тогда он достал не более одного красного и не более одного зеленого яблока. Значит, всего он достал не более 2 яблок. Делаем вывод: если Митя возьмет хотя бы 3 яблока, то среди них обязательно найдутся два одноцветных.

Если же Митя возьмет 2 или менее яблок, то среди них могут не встретиться два одноцветных. Значит, наименьшее количество яблок — 3.

Ответ: 3 яблока.

Эксперимент 2

Пусть Митя еще не достал 2 красных яблока. \Rightarrow Он достал ≤ 1 красного и ≤ 50 зеленых яблок. \Rightarrow Всего ≤ 51 яблока. Делаем вывод: если Митя возьмет хотя бы 52 яблока, то среди них обязательно найдутся два красных.

Если же Митя достанет 50 или меньше яблок, то они могут оказаться все зелеными, а если он достанет 51 яблоко, то ему могут попасться все зеленые яблоки и одно красное. Значит, наименьшее количество яблок — 52.

III ступень. Занятие 15. Сколько нужно взять?

Ответ: 52 яблока.

Эксперимент 3

Если Митя еще не достал по 15 красных и по 15 зеленых яблок, то это значит, что яблок какого-то цвета он достал меньше 15. \Rightarrow Всего он достал не более $50 + 14 = 64$ яблок (все яблоки одного цвета и 14 яблок другого цвета). \Rightarrow Если Митя достанет 65 яблок, то среди них обязательно найдутся и 15 красных, и 15 зеленых.

Если же он достанет меньше 65 яблок, то среди них могут не найтись 15 каждого цвета. Значит, наименьшее количество яблок — 65.

Ответ: 65 яблок.

Замечание

Важно обратить внимание школьников на то, что из-за равенства общего количества красных и зеленых яблок не важно, какие 50 яблок одного цвета учитываются в оценке «сверху» («... не более $50 + 14 = 64$ яблок (все яблоки одного цвета и 14 яблок другого цвета)»). В ходе занятия учащимся встретятся задачи, в которых в подобной ситуации количество разное, и нужно рассматривать оба случая отдельно.

Советы по решению задач о наибольшем (наименьшем) значении

1. Для ответа на вопрос о наибольшем (наименьшем) значении величины недостаточно разобрать один «лучший» случай. В таких задачах нужно доказать, что значение не может быть больше (меньше) найденного.
Пусть A — некоторое высказывание. При решении задач с вопросом «Какое
2. наименьшее число объектов нужно взять, чтобы A ?» можно сначала представить, что высказывание A ложно.
3. Словосочетания «не менее», «хотя бы» можно заменить на записи значком \geq , а словосочетание «не более» — значком \leq .

Вопросы для построения подводящего диалога

1. Какое, по-твоему, максимальное(минимальное) значение исследуемой величины, которое подходит под условие задачи?
2. Если условие не выполнено, то что можно сказать про значение исследуемой величины?
3. Как можно обосновать, что максимальное значение величины, которое может подойти под условие задачи, равно заданному числу?

Как проверить

Решение можно проверить, перебрав все возможные случаи.

Основные задания

1. В пенале

У Жени в пенале лежат карандаши трех цветов: красного, синего и зеленого, каждого цвета по 5 штук. Какое наименьшее количество карандашей ему нужно достать оттуда наугад, чтобы наверняка попались 3 карандаша одного цвета?

Подсказка

III ступень. Занятие 15. Сколько нужно взять?

Пусть Женя еще не достал 3 карандаша одного цвета. Тогда всего он достал не более 2 карандашей каждого цвета.

Решение

Пусть Женя еще не достал 3 карандаша одного цвета. Тогда всего он достал не более 2 карандашей каждого цвета. Значит, всего он достал не более 6 карандашей. Поэтому если достать хотя бы 7 карандашей, то среди них обязательно найдутся три одноцветных.

Если же достать 6 или менее карандашей, то три одноцветных могут не попасться. Действительно, карандаши могут выпасть в порядке: красный, красный, синий, синий, зеленый, зеленый (если достаются менее 6 карандашей, то рассматривается только часть этого ряда). Тогда среди попавшихся Жене карандашей не будет трех одноцветных. Значит, достать 6 или менее карандашей недостаточно.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) Пусть Женя еще не достал 3 карандаша одного цвета. Тогда он достал $K \leq 2$, $C \leq 2$, $Z \leq 2$. Всего достал карандашей $B \leq 6$ ($2 + 2 + 2$). \Rightarrow Если достать всего $B \geq 7$ карандашей, то будут 3 одноцветных.

2) Для случая, когда всего $B \leq 6$ карандашей может быть порядок: к к с с з з. (либо первые несколько карандашей этого набора) \Rightarrow Достать 6 или менее карандашей недостаточно.

Ответ: 7 карандашей.

Замечание

В данной записи (как и в краткой записи решения последующих задач) для сокращения по факту используются переменные:

K – количество вытащенных карандашей красного цвета, C – количество вытащенных синих карандашей, Z – количество вытащенных зеленых карандашей, B – сколько всего вытащено карандашей.

По-хорошему, все используемые в решении переменные должны быть сразу определены, но в некоторых случаях, если использовать для именованной переменной сокращения, по которым понятным образом восстанавливается их смысл, для сокращения времени и места под запись, можно попробовать использовать их сразу.

Здесь стоит обратить внимание детей, что не всем может быть понятна логика восстановления смысла переменной по ее именованию, и поэтому с такими сокращениями стоит быть аккуратными, а ещё лучше все введённые переменные сразу определить.

2. Погреб

В темном погребе стоят банки с вареньем: 10 — вишневого, 7 — сливового, 3 — черничного и 6 — яблочного. Какое наибольшее число банок можно унести из погреба так, чтобы там наверняка осталось хотя бы по одной банке варенья каждого типа?

Подсказка

Если в погребе **не** осталось хотя бы по одной банке варенья каждого типа, значит, какого-то типа варенья там больше нет.

Решение

Если в погребе не осталось хотя бы по одной банке варенья каждого типа, значит там больше нет варенья какого-то типа, то есть все банки какого-то типа унесли. Так как банок варенья каждого типа не менее трех, то это возможно, только если унесли хотя бы 3 банки. Значит, если унести не более 2 банок, то в погребе останется варенье каждого типа.

Если унести из погреба 3 или больше банок, то первыми унесенными могут быть банки черничного варенья, и этого типа не останется. Значит, наибольшее количество банок, которое можно унести — 2.

III ступень. Занятие 15. Сколько нужно взять?

Запись на доске и в пособии

- 1) Если в погребе не осталось хотя бы 1 В или 1 С или 1 Ч или 1 Я. \Rightarrow Там 0 банок В или С или Ч или Я. \Rightarrow Унесли $У \geq 3$ банки. \Rightarrow Если унести $У \leq 2$ банок, то варенье каждого типа останется.
- 2) Для ≥ 3 банок может быть порядок: Ч Ч Ч ... \Rightarrow Все типы варенья могут не остаться.

Ответ: 2 банки.

3. Сиреневый бульвар

Ира сажает цветы. У нее 20 семян красной гвоздики, 24 — розовой, 17 — белой, 7 — желтой и 5 — сиреневой. Семена гвоздик разных цветов перепутались. Какое наименьшее число семян нужно посадить Ире, чтобы выросло не менее 10 гвоздик одного цвета? (Считать, что все посаженные семена взойдут.)

Подсказка

Если не выросло хотя бы 10 гвоздик одного цвета, значит, посеяно не более 9 семян гвоздик каждого цвета.

Решение

Если Ира не посадит 10 гвоздик одного цвета, значит она посадила не более 9 гвоздик каждого цвета. Значит, всего она посадила не более 9 (красн.) + 9 (роз.) + 9 (бел.) + 7 (желт.) + 5 (сирен.) = 39 гвоздик. Значит, если Ира посадит 40 или более гвоздик, то среди них обязательно найдутся 10 одного цвета.

Если же Ира будет сажать не более 39 гвоздик, то (представим, что она сажает семена последовательно) сначала могут идти, например, 9 красных, потом 9 розовых, потом 9 белых, потом 7 желтых и 5 сиреневых гвоздик (если она посадит менее 39 гвоздик, то рассматривается часть этого ряда). Тогда среди посаженных Ирой гвоздик не будет 10 одноцветных. Значит, достать 39 или меньше чашек недостаточно.

Запись на доске и в пособии

1) Если Ира не посадила 10 гвоздик одного цвета \Rightarrow посадила $\Gamma \leq 9$ гвоздик каждого цвета. Значит, всего она посадила $\Gamma \leq 9$ (красн.) + 9 (роз.) + 9 (бел.) + 7 (желт.) + 5 (сирен.) = 39 чашек. \Rightarrow Если Ира посадила $\Gamma \geq 40$ гвоздик, то среди них обязательно найдутся 10 одноцветных.

2) Для $\Gamma \leq 39$ гвоздик может быть порядок:

$$\underbrace{К \dots К}_9 \underbrace{Р \dots Р}_9 \underbrace{Б \dots Б}_9 \underbrace{Ж \dots Ж}_7 \underbrace{С \dots С}_5$$

Тогда 10 одноцветных гвоздик не попадется. \Rightarrow Посадить 39 или менее гвоздик недостаточно.

Ответ: 40 гвоздик.

4. И то, и другое

Наташа приготовила на ужин вареники: 8 с творогом и 6 с картошкой. Какое наименьшее число вареников ей придется съесть, чтобы среди них наверняка оказались хотя бы 2 вареника с творогом и хотя бы 3 — с картошкой? (Внешне вареники неразличимы.)

Подсказка

Если Наташа ещё не съела 2 вареника с творогом и 3 — с картошкой, значит, она съела не более одного вареника с творогом или не более двух вареников с картошкой.

Решение

Если Наташа еще не съела хотя бы два вареника с творогом и хотя бы три — с картошкой, значит, она съела не более 1 вареника с творогом или не более 2 вареников с картошкой. Рассмотрим оба этих случая.

III ступень. Занятие 15. Сколько нужно взять?

Если она съела не более 1 вареника с творогом, то всего она съела не более 7 вареников (не более чем 1 вареник с творогом и не более чем 6 — с картошкой). Если же она съела не более 2 вареников с картошкой, то всего она съела не более 10 вареников (не более чем 8 вареников с творогом и не более чем 2 — с картошкой). В обоих случаях общее количество съеденных вареников не более 10. Значит, если Наташа съест 11 или больше вареников, то среди них обязательно окажутся хотя бы два с творогом и хотя бы три с картошкой.

В случае, если Наташа съест не более 10 вареников, ей могут попасться подряд 8 вареников с творогом и 2 с картошкой (если она съест менее 10 вареников, то рассматривается только часть этого ряда). Тогда среди попавшихся ей вареников не будет хотя бы 3 с картошкой. Значит, съесть 10 или менее вареников недостаточно.

Запись на доске и в пособии

1) Если Наташа еще не съела 2 Вт и 3 Вк, то она съела $Вт \leq 1$ или $Вк \leq 2$. В 1-м случае она съела $В \leq 1(Вт) + 6(Вк)$, то есть не более 7 вареников, а во 2-м съела $В \leq 8(Вт) + 2(Вк)$, то есть не более 10 вареников. \Rightarrow Наташа в любом случае съела ≤ 10 вареников. \Rightarrow Если она съест ≥ 11 вареников, то среди них точно найдутся нужные.

2) Для ≤ 10 вареников может быть порядок: $\underbrace{Вт \dots Вт}_{8} Вк Вк$

Тогда не попадется 3 вареников с картошкой. \Rightarrow Съесть 10 или менее вареников недостаточно.

Ответ: 11 вареников.

5*. Сокровища

У гнома в мешке 40 камней: алмазы, изумруды и рубины. Гном достает из мешка сокровища наугад. Чтобы наверняка вынуть алмаз, он должен достать не менее 25 драгоценных камней, а чтобы наверняка вынуть изумруд — достать не менее 28 камней. Какое наименьшее число камней гному надо наугад достать из мешка, чтобы быть уверенным, что он вынет по крайней мере один камень каждого вида?

Подсказка

Если бы в мешке изумрудов и рубинов вместе было 25 или больше, то, достав 25 камней, гном не всегда достанет алмаз.

Решение

Из первого условия следует, что изумрудов и рубинов вместе не более 24. Но если бы их было меньше 24, то наверняка вынуть из мешка алмаз можно было бы и при меньшем числе вынутых камней. Значит, изумрудов и рубинов вместе 24 штуки. Точно также можем найти число изумрудов, а потом — число рубинов.

1) $40 - 24 = 16$ (фр.) — алмазов

2) $40 - 27 = 13$ (фр.) — изумрудов

3) $24 - 13 = 11$ (фр.) — рубинов

Если Гном не достал хотя бы по одному камню каждого вида. \Rightarrow Он не достал камень какого-то вида. Тогда всего он достал не более $40 - 11 = 29$ камней (не достал рубины, так как их меньше всего). Если же Гном достанет 30 камней, то среди них обязательно найдутся камни всех трех видов.

Ответ: 30 драгоценных камней.

Тренировочные задания

1т. Сладости

В Международный женский день Тане подарили мешочек с конфетами: леденцами, ирисом, мармеладками и шоколадными батончиками. Конфет каждого типа больше 20. Какое наименьшее количество конфет нужно достать Тане из мешочка наугад, чтобы среди них наверняка попались 4 конфеты одного типа?

Решение

1) Пусть Таня еще не достала 4 конфеты одного типа. \Rightarrow Тогда она достала $L \leq 3, I \leq 3, M \leq 3, Ш \leq 3$. Всего достала конфет $K \leq 12 (3 \cdot 4)$. \Rightarrow Если достать $K \geq 13$ конфет, то точно будут 4 одного типа.

2) Для $K \leq 12$ конфет может быть порядок: ЛЛЛ ИИИ МММ ШШШ

Тогда 4 конфет одного типа не попадет. \Rightarrow Достать 12 или меньше конфет недостаточно.

Ответ: 13 конфет.

2т. Погреб

В темном погребе стоят 7 банок клубничного, 10 банок вишневого и 6 банок сливового компота. Какое наибольшее число банок можно вынести из погреба так, чтобы там наверняка остались хотя бы 3 банки вишневого компота?

Решение

1) Если 3 банок вишневого компота не осталось, то их осталось $O \leq 2$. \Rightarrow Унесли $Y \geq 8$ банок. \Rightarrow Если унести $Y \leq 7$ банок, то 3 банки вишневого обязательно останутся.

2) 7 — наибольшее возможное число, так как для числа банок $y \geq 8$ может быть порядок В В В В В В В ..., и тогда трёх банок вишневого компота не останется.

Ответ: 7 банок.

3т. Сиреневый бульвар

В магазин привезли одинаковые на вид саженцы сирени — по 10 саженцев белой, розовой и фиолетовой сирени. Какое наименьшее число саженцев нужно купить, чтобы среди них наверняка оказались 4 саженца фиолетовой сирени, или 5 — белой, или 6 саженцев розовой сирени?

Решение

1) Если не оказалось ни 4 саженцев Ф сирени, ни 5Б, ни 6Р, то купили $f \leq 3, b \leq 4$ и $p \leq 5$, а всего купили $s \leq 3 + 4 + 5 = 12$ саженцев. Значит, если купить не меньше 13 саженцев, то среди них точно будут нужные.

2) 13 — наименьшее число, так как для числа $k = 12$ может быть набор Ф Ф Ф Б Б Б Р Р Р Р Р, а для $k < 12$ — тот же набор, уменьшенный на соответствующее число саженцев.

Ответ: 13 саженцев.

4т. И то, и другое

Света испекла 9 пирожков с капустой, 6 с повидлом и 7 с яйцом. Но сделала она их одинаковой формы и теперь не знает, какой пирожок с какой начинкой. Какое наибольшее число пирожков

III ступень. Занятие 15. Сколько нужно взять?

Света может отложить своему брату, чтобы у неё точно остались 3 пирожка с капустой и 2 с повидлом?

Решение

1) Если не осталось 3К и 2П, то осталось $oK \leq 2$ или $oП \leq 1 \Rightarrow$ Света раздала $pK \geq 7$ или $pП \geq 5 \Rightarrow$ Если она раздаст (отложит брату) не более 4 пирожков, то у неё точно останутся 3К и 2П.

2) 4 — наибольшее возможное число, так как для $p \geq 5$ может оказаться порядок П П П П П ..., и у Светы не останется 2П.

Ответ: 4 пирожка.

5т*. Мелки

В коробке лежат мелки трех цветов: красного, синего и желтого (все 3 цвета присутствуют). Известно, что среди любых 15 мелков найдется красный мелок, а среди любых 30 мелков — синий. Какое наибольшее количество мелков может быть в коробке?

Решение

Среди любых 15 мелков найдется красный мелок $\Rightarrow C + Ж \leq 14$.

Среди любых 30 мелков найдется синий мелок $\Rightarrow K + Ж \leq 29$.

При этом $Ж \geq 1$, а значит $C \leq 13$. Тогда в коробке $K + Ж + C \leq 42$ (13 + 29) мелков.

Ровно 42 мелка могут быть, если $Ж = 1$, $C = 13$, $K = 28$.

Ответ: 42 мелка.

Дополнительные задания

6. Два сапога — пара?

В темной кладовке лежат 7 пар черных и 10 пар коричневых сапог. Какое наименьшее количество сапог нужно достать из кладовки, чтобы среди них оказалась одноцветная пара? (В темноте нельзя не только определить, какого цвета сапог, но и то, левый он или правый.)

Подсказка

Если одноцветной пары не оказалось, значит, в каждом цвете вытаскивали сапоги только на одну ногу.

Решение

Если одноцветной пары не оказалось, значит, среди вытащенных сапог одного цвета есть только левые или только правые сапоги, то есть вытащено ≤ 7 черных сапог и ≤ 10 коричневых сапог. Тогда всего достали ≤ 17 сапог. Если же достать 18 сапог, то среди них обязательно окажется пара одноцветных.

Если вытащить не более 17 сапог, то могут, например, сначала попасться 7 черных левых сапог, а затем 10 коричневых левых сапог (если достается менее 17 сапог, то рассматривается часть этого ряда), и одноцветную пару нельзя будет составить. Значит, достать 17 или меньше сапог недостаточно.

Ответ: 18 сапог.