

ЗАНЯТИЕ 13. Разрежь и составь (Перекраивание фигур)

Предметные цели

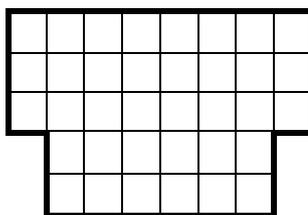
1. Развить представления о симметрии и повороте фигур.
2. Познакомить с задачами на тему «разрежь и составь», с понятием равносоставленных фигур.
3. Развить умение проводить анализ задачи на разрезание, применять методы узких мест и перебора при решении задач на тему «разрежь и составь».

Учебное содержание

Задача-ключ

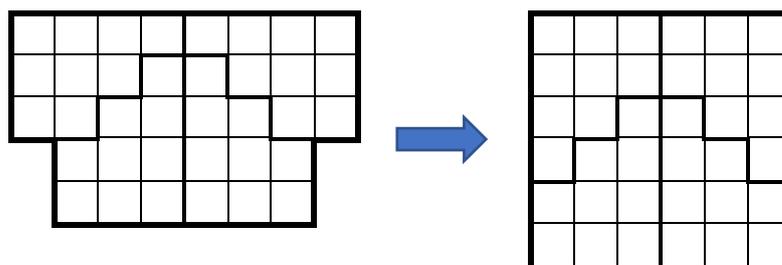


Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, по линиям сетки на четыре равные части и сложите из всех этих частей один квадрат.



Решение

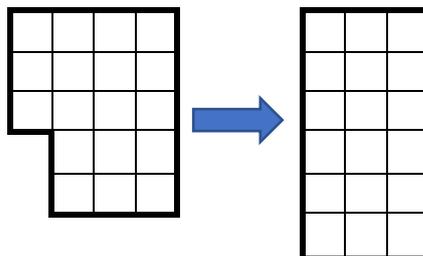
Вариант — на рисунке.



Путь к решению

В данной фигуре всего $8 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 36$ кл. Это значит, что после перекраивания должен получиться квадрат со стороной 6 клеток. Кроме того, фигуру нужно разрезать на 4 равные части, поэтому в каждой части получится $36 : 4 = 9$ кл.

Заметим, что фигура имеет вертикальную ось симметрии. Проведем эту ось, и теперь достаточно показать, как разрезать любую из получившихся половин на две равные части, из которых можно сложить прямоугольник 3×6 .



Далее проведем ступенчатый разрез фигурки-половинки и проверим, что получаются равные части. Далее из двух симметричных частей можно сложить прямоугольник.

Советы по решению задач про равноставленные фигуры

Две фигуры **называются равноставленными**, если одну из них можно разрезать на такие части, из которых можно составить вторую фигуру.

1. При решении задач о составлении одной фигуры из всех частей другой помни, что **площади** равноставленных фигур равны.
2. Чтобы разрезать фигуру, обладающую осью симметрии, на 4 равные части, можно сначала разрезать ее по **оси симметрии** на 2 половины, а затем разрезать каждую половину на **2 равные части**.

Внимание! Этот способ дает не все варианты разрезания на 4 части. В некоторых вариантах части могут пересекать ось симметрии.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. О равноставленности каких фигур идет речь в задаче?
2. Какова площадь исходной фигуры (сумма площадей исходных фигур)? Какова будет площадь у новой фигуры? Какие еще свойства новой фигуры можно узнать?
3. Есть ли у данной фигуры ось симметрии, центр симметрии? Поможет ли эта информация для нахождения разрезания?

Как проверить

1. Равенство фигур можно проверить, вырезая и накладывая их.
2. Неравенство фигур можно показать, находя характерные элементы одной фигуры, которых нет у второй («узкие места»).
3. Правильность перекраивания можно проверить **разрезанием** исходной фигуры и **составлением** новой.

Основные задания

1. Перекраивание прямоугольника (3 мин)

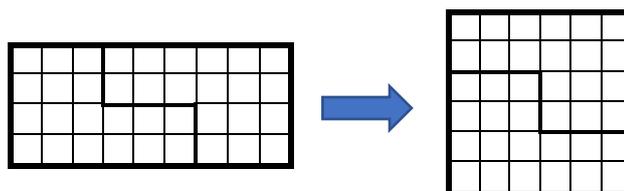
Дан клетчатый прямоугольник 9×4 . Разрежь его по границам клеток на 2 равные части и составь из них квадрат.

Подсказка

Отметь центр прямоугольника. Вспомни известные тебе способы разрезания фигуры, имеющей центр симметрии, на две равные части.

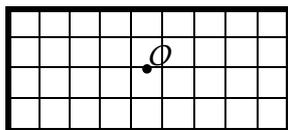
Решение

Вариант — на рисунке.

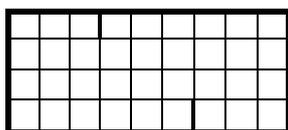


Путь к решению

Отметим точку O — центр прямоугольника 9×4 . Вспомним («Математический театр. 3 класс», занятие 2), что для разрезания на две равные части фигуры, которая обладает центром симметрии, можно вести разрезы из центра в до края или из симметричных точек с краю в противоположных направлениях.



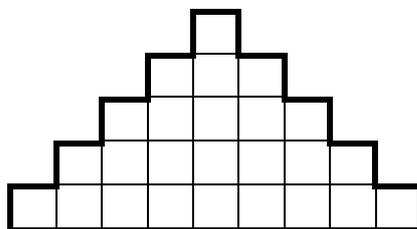
Так как в исходной фигуре было $9 \cdot 4 = 36$ кл., то данный прямоугольник нужно перекроить в квадрат со стороной 6 клеток. Поэтому для построения нужного разреза можно начать с симметричных точек с края, находящихся от него на расстоянии 6 кл.:



Далее, двигаясь в противоположных направлениях, можно построить искомый разрез.

2. Лесенка из пентамино (4 мин)

Разрежь лесенку, изображенную на рисунке, на фигуры пентамино так, чтобы все фигуры были разными. Затем сложи из всех получившихся частей один квадрат.

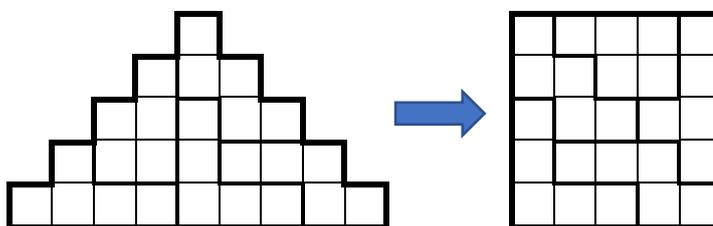


Подсказка

Сначала раздели фигуру на две неравные части, из которых можно составить квадрат.

Решение

Один из возможных вариантов — на рисунке.

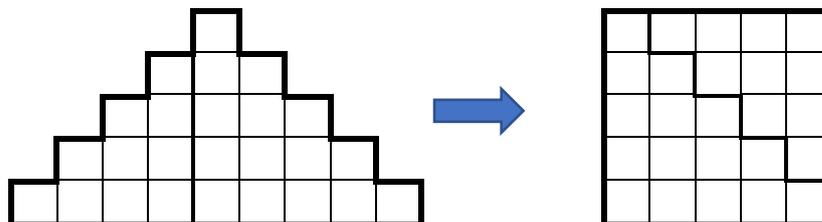


Вопросы для подводящего диалога

1. Квадрат какого размера должен получиться?
2. Где «узкие места» фигуры?
3. Верхние клетки можно считать «узким» местом. Какие фигуры можно расположить в этом «узком» месте?
4. «Ступеньки» тоже можно считать «узкими» местами. Какие фигуры можно расположить на «ступеньках»?

Путь к решению

Удобно начать анализ условия задачи с конца, то есть с вопроса о составлении квадрата. Всего фигура состоит из $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2 = 25$ кл., а значит, нужно составить квадрат 5×5 . Сначала просто разделим фигуру на части из 10 клеток и 15 клеток, из которых удобно составить квадрат (можно вспомнить, что это один из способов быстрого подсчета суммы нескольких первых нечетных чисел):



Так как количество клеток в каждой из двух частей делится на 5, то можно отдельно разрезать каждую на пентамино (только нужно помнить, что все фигуры должны быть разными). Для удобства можно открыть список всех этих фигур из занятия №3 «Пентамино».

Замечание

Могут быть и другие варианты разрезания.

3. Из двух один (3 мин)

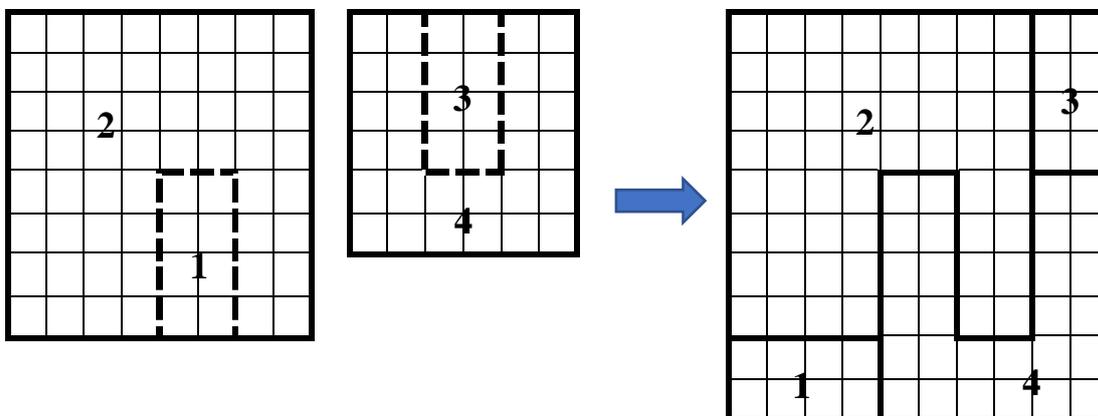
Султан приказал сшить из двух ковров размерами 6×6 метров и 8×8 метров большой ковер размером 10×10 метров так, чтобы не потерялось ни кусочка ценной шерсти. Помогите дворцовым швеям разрезать каждый из двух ковров на 2 части и составить из получившихся частей большой ковер.

Подсказка

Изобрази ковры в виде квадратов со сторонами 6 и 8 клеток и уложи эти «ковры» в противоположные углы квадрата со стороной 10 клеток.

Решение

Один из возможных вариантов — на рисунке.

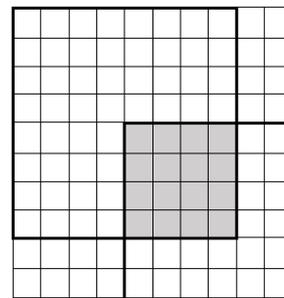


Путь к решению

Изобразим ковры в виде квадратов со стороной 6 и 8 клеток. Разрезания будем проводить только по линиям сетки (для удобства построения примера; в условии это не требуется). Расположим квадраты в противоположных углах будущего ковра 10×10 . Ковры будут частично пересекаться (по квадрату 4×4):

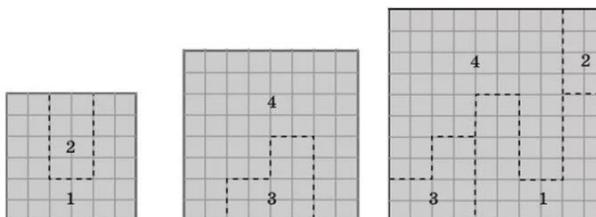
III ступень. Занятие 13. Перекраивание фигур

Заметим, что в правом верхнем и левом нижнем углах образовались пустые прямоугольники размерами 2×4 . Чтобы их заполнить, отрезем куски такого же размера от пересекающейся части ковра 6×6 и 8×8 и получим искомый пример.



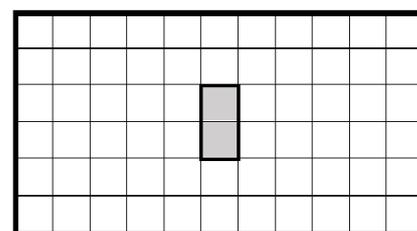
Замечание

Могут быть и другие варианты разрезания, например:



4. Кройка и шитье (3 мин)

В покрывале размером 11×6 клеток моль проела дырки, поэтому из него пришлось вырезать кусок, показанный на рисунке серым цветом. Оставшуюся часть покрывала нужно разрезать на две равные части по границам клеток и сшить из этих частей новое квадратное покрывало. Как это можно сделать?

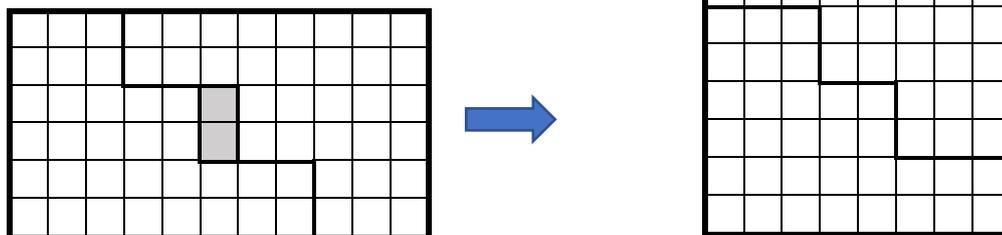


Подсказка

Сколько клеток будет вдоль стороны получившегося квадрата?

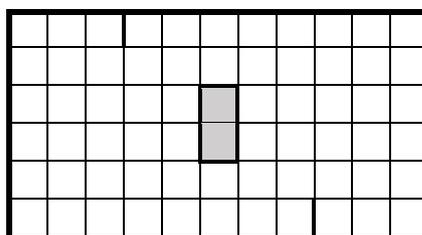
Решение

Один из возможных вариантов — на рисунке.

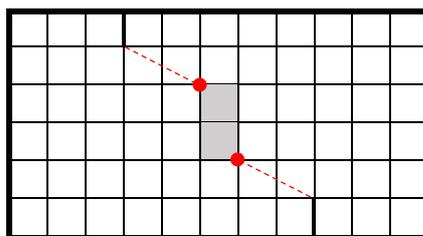


Путь к решению

В полученной фигуре 64 клетки. Значит, квадрат будет иметь сторону 8, и от длинной стороны прямоугольника нужно отрезать не менее трех клеток. Можно предположить, что отрезается ровно три клетки. Чтобы части оказались равными, линия разреза должна быть симметричной относительно центра фигуры (прямоугольник с дыркой имеет центр симметрии). Поэтому попробуем начать разрез так:



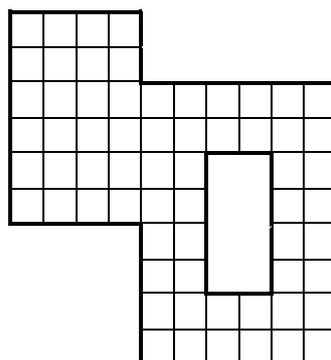
Заметим, что противоположные углы дырки являются точками, симметричными относительно центра дырки. Поэтому линия разреза должна проходить через эти точки:



Так как разрез должен идти по линиям сетки, попробуем ступенчатый разрез. Выбирая один из этих разрезов, получаем требуемый способ разрезания.

5*. Квадратный стол (5 мин)

Мастер нашел кусок пластика необычной формы (см. рис.) и решил сделать из него квадратную столешницу. Для этого он разрезал эту фигуру на 2 части, из которых потом склеил один квадрат. Покажи, как это можно сделать.

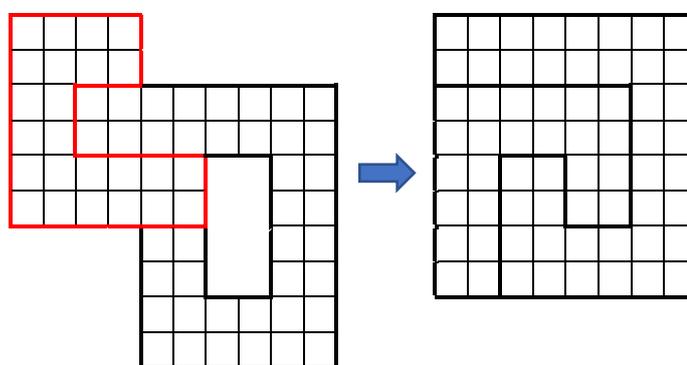


Подсказка

Квадрат какого размера получится после склеивания? Наложь этот квадрат на исходную фигуру. Какая часть должна быть убрана, а какая — добавлена?

Решение

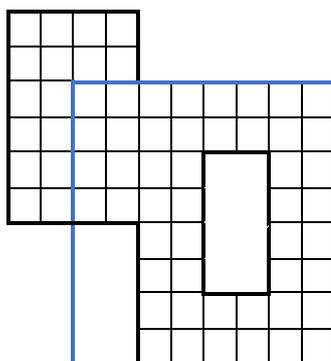
Вариант — на рисунке.



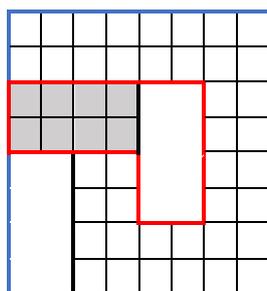
Путь к решению

Вычислим количество клеток в изначальной фигуре: $8 \cdot 6 - 4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 48 - 8 + 24 = 64$ кл. Таким образом, эту фигуру нужно перекроить в квадрат со стороной 8 клеток.

Заметим, что вдоль верхней стороны фигуры — 8 клеток. Наложим фигуру на квадрат 8×8 (ответен синим цветом):



Нужно заполнить отверстие размером 4×2 . Заметим, что в левой части как раз есть подходящая часть. Наложим оставшуюся слева фигуру:



Выделенная серым часть оказалась наложенной дважды. Добавив эту часть к правой части, получим искомое разрезание.

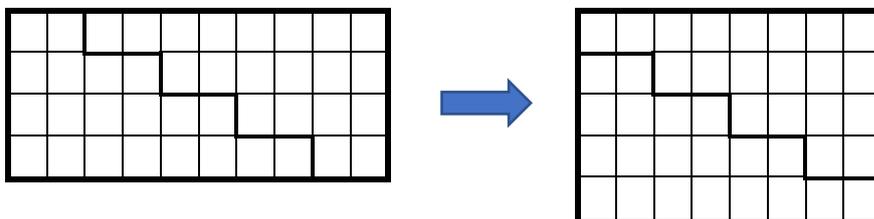
Тренировочные задания

1т. Перекраивание прямоугольника

Дан клетчатый прямоугольник 10×4 . Разрежь его по границам клеток на 2 равные части и составь из них прямоугольник 8×5 .

Решение

Возможный пример — на рисунке.

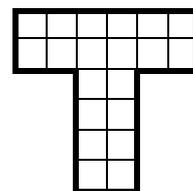


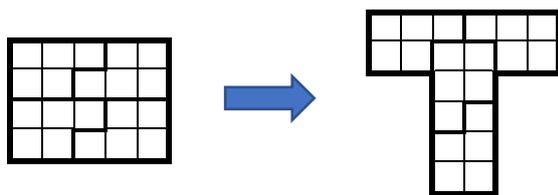
2т. ПенТамино

Дан клетчатый прямоугольник 5×4 . Разрежь его на 4 одинаковые фигуры пентамино и составь из них букву Т, как на рисунке.

Решение

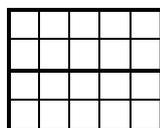
Один из возможных вариантов — на рисунке.



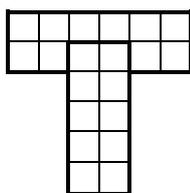


Путь к решению

Сначала разделим прямоугольник 5×4 пополам (то есть на прямоугольники 5×2):



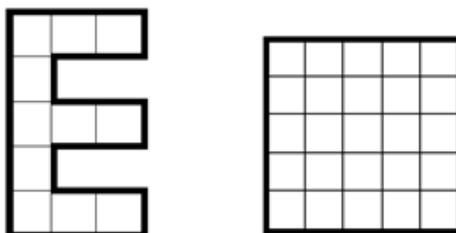
В ножку фигуры в виде буквы Т можно поместить такой повернутый прямоугольник:



Заметим теперь, что верхнюю часть можно разделить на Р-пентамино. Отсюда получается требуемое разрезание.

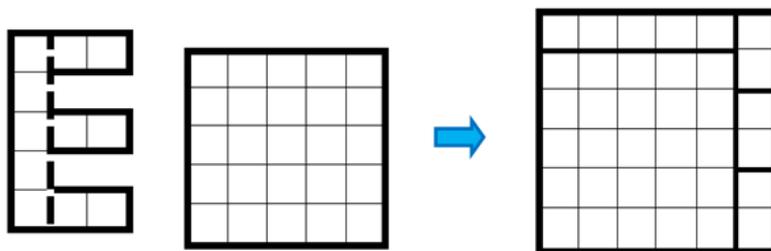
3т. Резак-1

У Андрея есть 2 фигуры (см. рис.). Он хочет воспользоваться резаком только один раз так, чтобы из всех получившихся частей этих фигур можно было составить квадрат. Помогите Андрею справиться с заданием, показав нужный разрез и способ составления квадрата.



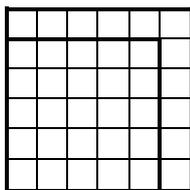
Решение

Один из вариантов — на рисунке.



Путь к решению

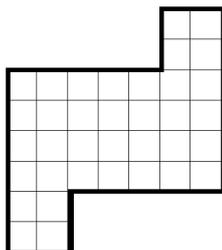
Всего в двух фигурах $5 \cdot 5 + 3 \cdot 5 - 4 = 36$ кл. Значит, нужно составить квадрат со стороной 6 клеток. Поставим данный квадрат в нужный квадрат:



Заметим, что сверху от квадрата осталась полоска 6×1 . Отрежем от оставшейся фигуры такую полоску и сможем составить из полученных частей нужный квадрат.

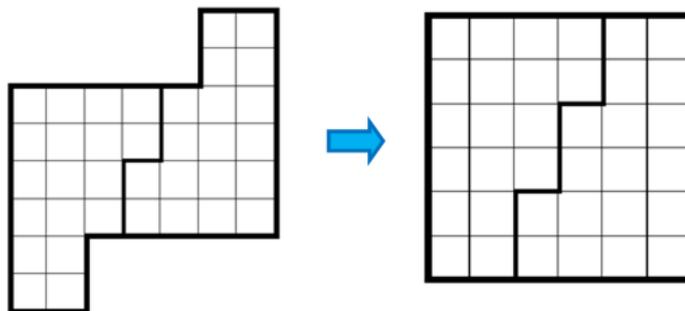
4т. Загогулина

Разрежь данную фигуру (см рис) по границам клеток на 2 равные части и составь из них квадрат.



Решение

Один из возможных вариантов — на рисунке.

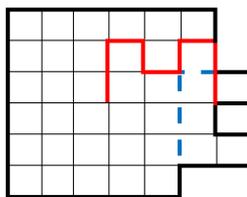


Путь к решению

В полученной фигуре 36 клеток. Значит, квадрат будет иметь сторону 6. Можно предположить, что нижний ряд клеток фигуры будет целиком составлять сторону квадрата, то есть этот ряд будет принадлежать одной из частей фигуры. Тогда квадрат 2×2 в правом верхнем углу наверняка будет принадлежать другой части. Значит, конец разреза должен быть расположен либо в нижнем левом углу этого квадрата, либо ниже.

Фигура имеет центр симметрии, можно попробовать сделать разрез, симметричный относительно центра. Тогда его концы будут лежать между внутренними вершинами квадратов 2×2 в левом нижнем и правом верхнем углах, а также должен проходить через центр фигуры. Получаем такой эскиз разреза, как на рисунке.

Попробуем «встроить» эту пятиклеточную часть в рисунок (закрывая свободную клетку):

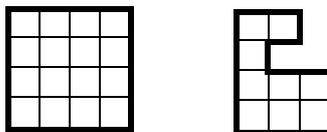


Отсюда получим подходящий вариант разрезания.

Дополнительные задания

6. Резак-2 (4 мин)

У Вити есть 2 фигурки (см. рис.), которые он хочет разрезать на части и сложить из них квадрат. Как Витя может сделать, воспользовавшись резакom всего один раз.



Примечание

На резак можно положить несколько фигур, а затем произвести разрез по прямой линии от края до края. Располагать фигуры на резаке можно как угодно, но нельзя сгибать их и накладывать друг на друга.

Решение

Вариант — на рисунке.

