ЗАНЯТИЕ 9. Делимость и признаки

Учебное содержание

Предметные цели

1. Актуализировать знания о признаках делимости на 2, 5, 10, 3, 9 и методах их доказательства и тренировать умение их применять.
2. Познакомить обобщением признаков делимости — признаками делимости на 2^n и 5^n.
3. Формировать умение применять признаки делимости при решении задач.

Задача-ключ

Представьте себе, что некто старательно выписал в строку без пробелов все числа от 1 до 100 и получил некоторое многозначное число. Делится ли это число на 8?

Решение

1-*й способ (без признака делимости на 8)*

Заметим, что число оканчивается на 100. Разложим это число на сумму 123…99000 + 100. Заметим, что число 123…99000 делится на 1000, а значит, по свойству делимости делится и на 8. Число 100 не делится на 8, поэтому по свойству делимости суммы исходное число не делится на 8.

2-*й способ (с признаком делимости на 8)*

Число, составленное из трех последних цифр записанного многозначного числа — 100. Оно не делится на 100, поэтому по признаку делимости на 8 данное число не делится на 8.

Ответ: нет.

Новые признаки делимости

1. Число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное его двумя последними цифрами, делится на 4.
2. Число делится на 8 в том и только том случае, когда число, образованное его тремя последними цифрами, делится на 8.
3. Число делится на 25 ⇔ число, образованное его двумя последними цифрами, делится на 25.
4. Число делится на 125 ⇔ число, образованное его тремя последними цифрами, делится на 125.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. О делимости на какие числа говорится в задаче?
2. Знаешь ли ты признаки делимости на эти числа? Если да, то сформулируй их. Если нет, то проверь делимость по определению.

Как проверить

Проверь делимость по определению.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Основные задания

1. Делимость на 15

Какую цифру можно поставить вместо звездочки в записи 314*5 так, чтобы полученное число делилось и на 3, и на 5?

Подсказка

Не забудь найти все варианты!

Решение

По признаку делимости на 5 данное число делится на 5 (так как его десятичная запись заканчивается цифрой 5). Пусть n — цифра, обозначенная звездочкой. Число 314n5 делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма $3 + 1 + 4 + n + 5$ делится на 3, то есть $n + 13$ делится на 3. Подходят значения $n \in \{2, 5, 8\}$ (следующее число, которое при прибавлении 13 делится на 3, уже двузначное, а n — цифра). Значит, получаются числа 31425, 31455, 31485.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) 314*$\underline{5}$ ⋮ 5, так как последняя цифра — 5.

2) Пусть n — цифра, обозначенная звездочкой. 314n5 ⋮ 3 ⇔ $3 + 1 + 4 + n + 5$ ⋮ 3, то есть $n + 13$ ⋮ 3.

3) $n \in \{2, 5, 8\}$.

Ответ: 2, 5 или 8.

Замечание

Школьники, знакомые с арифметикой остатков, могут предложить следующее решение.

По признаку делимости на 5 данное число делится на 5 (так как его десятичная запись заканчивается цифрой 5). Пусть n — цифра, обозначенная звездочкой. Число 314n5 делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма $3 + 1 + 4 + n + 5$ делится на 3. Сумма $3 + 1 + 4 + 5 = 13$ дает остаток 1 при делении на 3, а сумма всех цифр должна давать остаток 0 при делении на 3. Это значит, что число n имеет остаток 2 при делении на 3. Поскольку n — цифра, $n \in \{2, 5, 8\}$.

2. Делимость на 27

Вспомни признаки делимости на числа 3 и $9 = 3 \cdot 3$. Можно ли сделать следующие «обобщения» этих признаков на число $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$?

а) Если число делится на 27, то его сумма цифр делится на 27.

б*) Если сумма цифр числа делится на 27, то и само число делится на 27.

Подсказка

Чтобы проверить, делится ли число на 27, можно сначала поделить его на 9, а затем разделить частное на 3. Число делится на 27 тогда и только тогда, когда полученное в итоге число — целое.

Решение

а) Нет, например, число 27 делится на 27, но сумма его цифр не делится на 27.

б) Нет, например, сумма цифр числа 9981 делится на 27, при этом данное число не делится на 27 (9981 : 9 = 1109, а это число не делится на 3).

Ответ: а) нет; б) нет.

Замечание

Существуют и другие контрпримеры к данным утверждениям.

Путь к решению

Контрпример к утверждению в пункте а) придумать очень просто, а вот самый простой пример числа с суммой цифр 27 — число 999 — делится на 27 и не подходит в качестве контрпримера к утверждению в пункте б). Значит, нужно искать контрпример среди четырехзначных чисел с суммой цифр 27. Отсюда и получается число 9981.

3. Пароль для телефона

Илья придумал пароль для телефона, состоящий из семи цифр, но забыл его. Он помнит только то, что все цифры пароля — девятки и двойки, причем девяток в записи пароля меньше, чем двоек, а все получившееся число делится на 3 и на 4. Сможет ли Илья по этим данным однозначно восстановить пароль?

Подсказка

Какие цифры могут оказаться на конце пароля? Не забудь разобрать все случаи.

Решение

По признаку делимости на 4 число, образованное двумя последними цифрами пароля, должно делиться на 4. На конце пароля могут образовываться числа: 22, 29, 92, 99. Среди них только 92 делится на 4, поэтому пароль должен заканчиваться на 92.

1-*й способ (метод перебора)*

Двоек в пароле больше, чем девяток, а всего в нем 7 цифр. Разберем все варианты:

1) 4 двойки, 3 девятки. $4 \cdot 2 + 3 \cdot 9 = 35$. Этот случай не подходит, так как 35 не делится на 3.

2) 5 двоек, 2 девятки. $5 \cdot 2 + 2 \cdot 9 = 28$. Этот случай не подходит, так как 28 не делится на 3.

3) 6 двоек, 1 девятка. $6 \cdot 2 + 1 \cdot 9 = 21$. Случай подходит.

4) 7 двоек . $7 \cdot 2 = 14$. Этот случай не подходит, так как 14 не делится на 3.

Значит, пароль состоит из 6 двоек и одной девятки и заканчивается на 92. Подходит единственное число — 2222292.

Запись на доске и в рабочей тетради

Пусть n — пароль.

1) $n \vdots 4 \Rightarrow$ Число из двух последних цифр $\vdots 4$. Это может быть 22, 29, 92, 99. Подходит 92.

2) $n \vdots 3 \Rightarrow$ Сумма цифр числа n делится на 3. Двоек больше, чем девяток, а всего 7 цифр. Значит, двоек может быть от 4 до 7. Оформим перебор в виде таблицы:

Число двоек	Число троек	Сумма цифр	Вывод
4	3	17	– (не делится на 3)
5	2	16	– (не делится на 3)
6	1	15	+ (делится на 3)
7	0	14	– (не делится на 3)

Значит, пароль состоит из 6 двоек и одной девятки и заканчивается на 92. Подходит единственное число — 2222292.

2-*й способ (делимость)*

По признаку делимости на 3 сумма цифр пароля должна делиться на 3. Сумма всех девяток делится на 3, значит, и сумма всех двоек в пароле должна делиться на 3. Так как 2 и 3 взаимно просты, то это может быть только если количество двоек в записи пароля делится на 3. Число семизначное, значит, в нем может быть 0, 3 или 6 двоек. Но одна двойка в числе уже есть, и остаются два варианта: 3 двойки или 6 двоек. В первом случае двоек меньше, чем девяток, что не подходит по условию. Второй вариант подходит и пароль восстанавливается однозначно — это число 2222292. Значит, Илья сможет восстановить пароль.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Запись на доске и в рабочей тетради

Пусть n — пароль.

1) $n \vdots 4 \Rightarrow$ Число из двух последних цифр $\vdots 4$. Это может быть 22, 29, 92, 99. Подходит 92.

2) $n \vdots 3 \Rightarrow$ Сумма цифр n делится на 3 $\Rightarrow$ Сумма двоек в пароле делится на 3 $\Rightarrow$ Так как 2 и 3 взаимно просты, то число двоек в пароле делится на 3. Двойки в числе есть, тогда их 3 или 6 Если 3 двойки, то двоек меньше, чем девяток, не подходит $\Rightarrow$ В числе 6 двоек и одна девятка. Из таких чисел делится на 4 только число 2222292 $\Rightarrow$ Можно однозначно восстановить пароль.

Ответ: сможет.

Замечание

Обратите внимание детей на то, что для решения задачи недостаточно привести один подходящий вариант пароля. Подбор одного варианта не гарантирует, что нет других подходящих вариантов, поэтому не позволяет дать ответ на вопрос о возможности однозначно восстановить пароль.

4*. Числа из карточек

У Полины было 100 карточек с цифрой 1 и 100 — с цифрой 2. Она выложила все эти карточки в некотором порядке и получила одно 200-значное число. Максим задумал некоторое натуральное число и умножил его на число Полины. Результат умножения он смог выложить из 200 карточек с цифрой 3 и 200 карточек с цифрой 4. Докажи, что Максим ошибся в вычислениях.

Подсказка

Какие признаки делимости можно применить, когда порядок цифр в числе неизвестен?

Решение

1) $100 \cdot 1 + 100 \cdot 2 = 300$ — сумма цифр числа Полины.

2) $300 \vdots 3$, значит, по признаку делимости на 3 число Полины делится на 3.

3) Если в произведении один из множителей делится на 3, то и произведение делится на 3. Значит, результат умножения Максима делится на 3.

4) $200 \cdot 3 + 200 \cdot 4 = 1400$ — сумма цифр числа, выложенного Максимом.

Эта сумма цифр не делится на 3, значит, само выложенное Максимом число не делится на 3. Значит, Максим ошибся, когда вычислял произведение.

Тренировочные задания

1т. Делимость на 12

Какую цифру можно поставить вместо звездочки в записи 156*2 так, чтобы полученное число делилось и на 3, и на 4?

Решение

1) $156\underline{*2} \vdots 4 \Leftrightarrow *2 \vdots 4$. Пусть n — цифра, обозначенная звездочкой. Тогда $n \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

2) $156n2 \vdots 3 \Leftrightarrow 1 + 5 + 6 + n + 2 \vdots 3$, то есть $n + 14 \vdots 3$.

3) $n \in \{1, 7\}$.

Ответ: 1 или 7.

2т. Делимость на 18

Верны ли следующие утверждения:

а) если число делится на 18, то его сумма цифр делится на 18;

б) если сумма цифр числа делится на 18, то и само число делится на 18?

Решение

а) Нет, например, число 18 делится на 18, но сумма его цифр не делится на 18.

б) Нет, например, сумма цифр числа 99 равна 18, но 99 не делится на 18.

Ответ: а) нет; б) нет.

Замечание

Существуют и другие контрпримеры к данным утверждениям.

3т. Одни четверки

У первоклассника Игоря есть много карточек с цифрой 4. Может ли он составить из этих карточек число, которое: а) делится на 8; б*) делится и на 9, и на 11?

Решение

а) Докажем, что Игорь не может составить число, которое делится на 8.

1-*й способ (признак делимости на 8)*

а) Числа 4 и 44 не делятся на 8, поэтому из одной и двух карточек составить такое число не получится. Все остальные числа, которые может составить Игорь, оканчиваются на 444, а число 444 не делится на 8. Значит, по признаку делимости на 8 никакое составленное Игорем число не будет делиться на 8.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) Числа 4, 44, 444 не делятся на 8.

2) Остальные числа оканчиваются на 444 ⇒ Не делятся на 8 (по признаку делимости) ⇒ Игорь не может составить число, делящееся на 8.

2-*й способ*

Поделить число на 8 — это то же самое, что поделить его сначала на 4, а потом еще на 2. Если разделить на 4 число, запись которого состоит из одних четверок, то получится число, запись которого состоит из одних единиц. Но такое число — нечетное, и оно не делится нацело на 2. Значит, исходное число не могло делиться на 8.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) $n : 8 = (n : 4) : 2$.

2) 4…4 : 4 = 1…1. Число вида 1…1 не делится на 2 ⇒ Составить число, делящееся на 8, нельзя.

б*) Может. Например, число, составленное из 18 четверок, делится и на 9, и на 11.

Путь к решению

Заметим, что число, составленное из четного числа одинаковых цифр, делится на 11 (например, 4444 : 11 = 404, 444444 : 11 = 40404, и так далее). При этом если количество этих одинаковых цифр делится на 9, то и сумма цифр числа будет делиться на 9. Тогда и само число будет делиться на 9. Значит, под условие задачи подойдет число, составленное из числа четверок, которое одновременно четное и делится на 9. Самое маленькое из таких чисел — число, составленное из 18 четверок.

Ответ: а) нет; б) да.

4т*. Большое число

Ира выписала в строку все числа от 1 до 15 подряд без пробелов, получив таким образом одно большое число. Он утверждает, что это число делится на 117. Права ли Ира?

Решение

1) 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 4 + 1 + 5 = 66 —

сумма цифр полученного числа.

2) Сумма цифр не делится на 9, значит и число не делится на 9.

3) 117 делится на 9. Если бы число делилось на 117, то оно делилось бы и на 9. Значит, Леша не мог получить число, делящееся на 117.

Дополнительные задания

5. Марсианская делимость

В марсианской летописи за 4023 год указано, что из карточек с цифрами «4», «0», «3», «2» можно составить четырехзначное число, которое делится на 2, можно составить число, делящееся на 3, и так до 9. Можно ли верить написанному в летописи?

Подсказка

Число 3990 делится на 7.

Решение

Заметим, что сумма всех цифр на карточках равна 9, а значит, любое четырехзначное число, составленное из всех этих карточек, будет делиться на 3 и на 9. Далее, число 4032 делится на 2, 4 и 8 (по признакам делимости), а также делится на 6, поскольку делится на 2 и на 3. Число 4320 делится на 5, а число 4032 — на 7. Итак, из данных карточек можно составить числа, делящиеся на все указанные.

Запись на доске и в рабочей тетради.

1) $4 + 0 + 3 + 2 = 9 \Rightarrow$ Любое число из этих 4 цифр делится на 3 и на 9.

2) 4032 оканчивается на 032 $\Rightarrow$ делится на 8 $\Rightarrow$ делится на 2, 4.

3) 4032 делится на 2 и 3 $\Rightarrow$ делится на 6.

4) 4320 оканчивается на 0 $\Rightarrow$ делится на 5.

5) 4032 ⋮ 7.

Ответ: да.

6. Вычеркнуть наименьшее

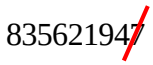
Из записи 835621947 требуется вычеркнуть наименьшее количество цифр так, чтобы оставшееся число делилось и на 4, и на 9. Сколько цифр нужно вычеркнуть?

Подсказка

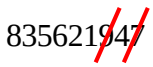
Обрати внимание на последние цифры числа.

Решение

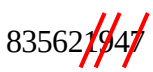
1) Цифру 7 необходимо вычеркнуть, иначе число — нечетное, а значит, не делится на 4.



2) Цифру 9 необходимо вычеркнуть, иначе число оканчивается на 9 или 94, а такие числа не делятся на 4.



3) Цифру 1 необходимо вычеркнуть, иначе число оканчивается на 1 или 14, а такие числа не делятся на 4.



4) Осталось число 835624. Оно делится на 4, но сумма его цифр равна 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 8 = 28, значит, число не делится на 9. Нужно вычеркивать еще цифры.

5) Натуральные числа, меньшие 28 и делящиеся на 9 — это 27, 18, 9. Цифры 1 в числе нет, поэтому получить сумму 27 не получится. Чтобы получить сумму цифр 18 или 9, нужно вычеркнуть цифры с суммой не менее 10, значит, придется вычеркнуть еще хотя бы 2 цифры, то есть всего не менее 5 цифр.

6) Если вычеркнуть ровно две цифры — 8 и 2, то получится число 3564, которое делится на 36. Значит, наименьшее количество вычеркнутых цифр равно 5.

Ответ: 5 цифр.

Замечание

В пункте 6 можно вычеркнуть также цифры 6 и 4. Оставшееся число будет делиться на 36.

7. Красивая математика

Верны ли высказывания о делимости натурального числа a, если: 1) n = 2; 2) n = 3? Что ты замечаешь? (Знак ⋮ означает «делится»; $x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ (*n раз*)

а) $a \vdots 2^n$,, $a \in N \Leftrightarrow$ (число, образованное n последними цифрами числа a) $\vdots 2^n$

б) $a \vdots 2^n$,, $a \in N \Leftrightarrow$ (число, образованное n последними цифрами числа a) $\vdots 5^n$

в) $a \vdots 3^n$, $a \in N \Leftrightarrow$ (сумма цифр числа a) $\vdots 3^n$,

Подсказка

Обрати внимание на последние цифры числа.

Решение

а) Это признаки делимости на 4 и на 8.

б) Это признаки делимости на 25 и 125.

в) При n= 2 это признак делимости на 9. При n=3 по доказанному в задаче 2 следствие не

верно ни в ту, ни в обратную сторону.

Ответ: а) Верно при n = 2 и n = 3; б) верно при n = 2 и n = 3; в) верно при n = 2, но неверно при n = 3.