ИГРА 1 К ЗАНЯТИЯМ 1–4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ АБАКА

Учебное содержание

Предметные цели

1. Тренировать знания и умения, полученные на занятиях №№1–4 «Математического театра».

Задания и решения[1]

Магический квадрат. 10 очков

Вставь вместо пропусков числа 1, 3, 5, 7, 8 и 16 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось верное равенство: __ + __ + __ = __ + __ + __.

Ответ: 1 + 3 + 16 = 5 + 7 + 8.

Путь к решению

1) 1 + 3 + 5 + 7 + 8 + 16 = 40 — сумма всех чисел

2) 40 : 2 = 20 — сумма чисел в одной половине

3) 20 = 1 + 3+ 16 = 5 + 7 + 8

Магический квадрат. 20 очков

Составь математический квадрат 3 × 3 из чисел 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64.

Решение

Возможный пример:

57	64	59
62	60	58
61	56	63

Путь к решению

Если ко всем числам в математическом квадрате прибавить 55, то квадрат сохранит свои свойства. Значит, можно получить такой квадрат:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

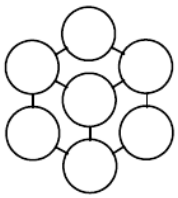
+ 55 →

57	64	59
62	60	58
61	56	63

Замечание

Существуют и другие примеры.

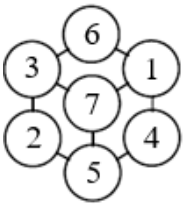
Магический квадрат. 30 очков



Расставь в кружках все числа от 1 до 7 по одному разу так, чтобы суммы чисел в вершинах каждого из трех ромбов равнялись 17.

Решение

Возможный пример — на рисунке.



[1] В данной игре участники сдают только ответы. Решения приводятся в ознакомительных целях. После подведения итогов игры можно разобрать с учащимися решения задач, вызвавших затруднения.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

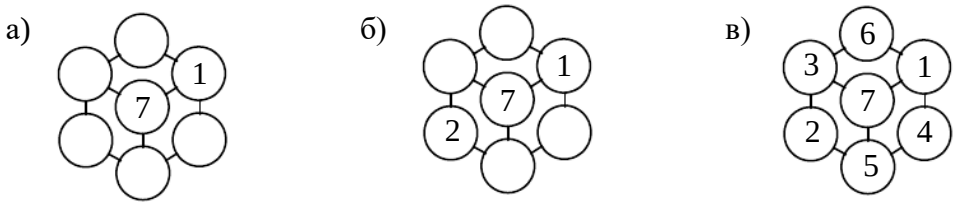
Путь к решению

Рассмотрим «узкое место» — число 1. Оно находится в некотором ромбе. Сумма остальных трех чисел в этом ромбе равна 16. Если среди них нет 7, то наибольшая возможная сумма равна 4 + 5 + 6 = 15. Значит, число 1 находится в одном ромбе с числом 7. Сумма остальных двух чисел этого ромба равна 16 – 7 = 9. Такую сумму можно набрать из оставшихся чисел двумя способами: 3 + 6 = 9 или 4 + 5 = 9. Таким образом, понимаем, что число 1 не может стоять в центральном кружке (он лежит сразу в 3 ромбах).

Пусть число 1 стоит на пересечении двух ромбов. Тогда число 7 должно оказаться в центре (см. рис. а).

Остальные два кружка в ромбах должны быть заполнены парами (3, 6) и (4, 5). Значит, в оставшемся кружке должна быть единственная оставшаяся цифра 2 (см. рис. б).

Сумма оставшихся двух чисел левого ромба равна 17 – 2 – 7 = 8. Значит, в этих кружках должны располагаться числа 3 и 5. Получим пример (см. рис. в).



Магический квадрат. 40 очков

Купец хочет разделить между тремя дочерями приданое: 7 слитков меди, 5 слитков серебра и 3 слитка золота — так, чтобы стоимость приданого у всех была одинакова. Помоги ему справиться с задачей, если известно, что 1 слиток серебра ценится так же, как 4 слитка меди, а один слиток золота ценится так же, как 3 слитка серебра.

Ответ: 1-я дочь — (1 з, 2 с, 1 м), 2 дочь — (1 з, 2 с, 1 м), 3 дочь — (1 з, 1 с, 5 м).

Путь к решению

1-*й способ*

Выдадим каждой дочери по одному золотому слитку, останется разделить поровну 7 медных и 5 серебряных слитков. Количество серебряных слитков не делится на 3, поэтому можно раздать их как 2, 2 и 1. Так как 1 слиток серебра по стоимости равен 4 медным слиткам, то сейчас первые две дочери «богаче» третьей на 4 медных слитка. Отдадим эти 4 слитка третьей дочери, а оставшиеся 3 слитка можно разделить поровну между дочерями.

2-*й способ*

Оценим стоимость приданого в медных слитках.

1) 1 з = 3 с = 3 · 4 = 12 м — стоимость золотого слитка в медных слитках

2) 3 · 12 + 5 · 4 + 7 = 63 (сл.) — стоимость приданого в медных слитках

3) 63 : 3 = 21 (сл.) — должно достаться каждой дочери в медных слитках

Заметим, что в приданое каждой дочери может войти не более 1 золотого слитка, иначе его стоимость будет как минимум 12 · 2 = 24, что больше 21. Но так как золотых слитков всего 3 и дочерей тоже 3, то у каждой дочери точно будет по 1 золотому слитку. Теперь осталось набрать приданого по 21 – 12 = 9 (сл. м.). Заметим теперь, что к приданому нельзя добавить более двух слитков серебра, так как иначе стоимость добранного будет как минимум 3 · 4 = 12 (сл. м.). Так как слитков серебра 5, а дочерей 3, то, учитывая вышесказанное, серебро разделится между дочерями таким образом: 2, 2, 1. Теперь двумя дочерям осталось добавить по 9 – 2 · 4 = 9 – 8 = 1 (сл. м.), и одной дочери – 9 – 1 · 4 = 5 (сл. м.). Но это как раз 7 слитков меди, которые у нас остались.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Остров рыцарей и лжецов. 10 очков

На острове только 2 города: в одном живут только рыцари, а в другом — только лжецы. Встретились двое жителей этого острова. Один сказал другому: «Мы оба рыцари!» Другой ответил: «Мы из одного города!» Определи, кто из них кто, если известно, что среди них есть хотя бы один рыцарь.

Решение

1) Пусть I — Р. Он говорит правду, что они оба Р, значит, II тоже Р. I и II действительно из одного города и второй говорит правду. Подходит.

2) Пусть I — Л. Так как среди двоих хотя бы один Р, то это II. Но он лжет, потому что I и II из разных городов. Случай не подходит.

Ответ: I — Р, II — Р.

Остров рыцарей и лжецов. 20 очков

Турист встретил на дороге трех жителей острова рыцарей и лжецов и задал каждому из них вопрос: «Сколько среди вас рыцарей?». Первый житель ответил: «Ноль». Второй ответил: «Три». Что ответил третий житель?

Решение

1) Пусть I — Р. Он говорит правду, что среди них 0 Р. Но это ложь, так как среди них есть хотя бы один Р (I). Случай не подходит.

2) Пусть I — Л. Он лжет, что среди них 0 Р, значит, хотя бы один Р есть. Но II — Л, потому что не все трое Р. Значит, III — Р и честно ответил: «Один».

Ответ: один.

Остров рыцарей и лжецов. 30 очков

В очередь друг за другом встали 15 жителей острова рыцарей и лжецов. Каждый из них сказал: «В очереди впереди меня есть хотя бы один рыцарь.» Сколько рыцарей могло быть среди них?

Решение

Рассмотрим 1-го жителя в очереди. Перед ним никто не стоит, значит, он лжет, то есть он Л. Тогда 2-й по счету тоже Л, потому что перед ним в очереди нет рыцарей. По очереди рассматривая 3-го, 4-го, …, 15-го человека в очереди получаем, что они Л, так как перед ними в очереди каждый раз оказываются одни лжецы. Таким образом, в очереди нет рыцарей.

Ответ: 0.

Остров рыцарей и лжецов. 40 очков

Встретились два жителя острова рыцарей и лжецов: Клик и Клак. Клик сказал: «Ты можешь сказать, что я являюсь рыцарем». На что Клак ответил: «А ты можешь сказать, что я являюсь лжецом». Кем является каждый из жителей — рыцарем или лжецом?

Решение

1) Пусть Клик — Р. Он говорит правду, что Клак может назвать его Р, то есть сказать правду. Значит, Клак тоже Р. Но тогда Клак лжет, потому что рыцарь Клик не может назвать его лжецом. Случай не подходит.

2) Пусть Клик — Л. Он солгал, и Клак не может назвать его Р. А так как Клик действительно не Р, значит Клак — Р. При этом Клик может сказать про Клака, что тот Л (потому что на самом деле это ложь). Случай подходит.

Ответ: Клик — Л, Клак — Р.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Переправы. 10 очков

К левому берегу реки подошли трое полицейских, ведущие троих воришек. Как им всем переправиться на правый берег, если у них есть трехместная лодка, а воришек нельзя нигде оставлять без присмотра хотя бы одного полицейского?

Решение

Покажем алгоритм перевозки в таблице.

Левый берег	Переправа	Правый берег
П, В, В	П, П, В →	
П, В, В	← П	П, В
П	П, В, В →	П, В
П	← П	П, В, В, В
	П, П →	П, В, В, В

Переправы. 20 очков

На прямоугольном поле 1 × 5 встретились 2 зеленых и 2 красных кузнечика:

З	З		К	К

За один раз любой кузнечик может прыгнуть либо в соседнюю свободную клетку, либо перепрыгнуть через ровно одного кузнечика и приземлиться в следующую за ним клетку (но эта клетка должна быть свободна, чтобы он мог прыгнуть). Как зеленым и красным кузнечикам поменяться местами: зеленым оказаться на месте красных, а красным — на месте зеленых?

Решение

Приведем алгоритм в форме таблицы.

З	З		К	К
З	З	К		К
З		К	З	К
	З	К	З	К
К	З		З	К
К	З	К	З	
К	З	К		З
К		К	З	З
К	К		З	З

Переправы. 30 очков

Два туземца катались на своей лодке, когда на левом берегу показался полк мушкетеров. Мушкетеры уговорили туземцев переправить их на правый берег, однако лодка не так велика

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

— в нее поместятся либо два туземца, либо один мушкетер. Как туземцам переправить всех мушкетеров на правый берег?

Решение

Перевезем сначала одного мушкетера. Покажем алгоритм перевозки в таблице:

Левый берег	Переправа	Правый берег
Т, Т, М	Т, Т →	
М	← Т	Т
Т	М →	Т
Т	← Т	М

Таким образом, после 4 переправ мушкетер оказался на правом берегу, а туземцы и лодка — на исходном, где находятся все еще не переправленные мушкетеры. Будем повторять аналогичные действия пока все мушкетеры не будут перевезены на правый берег.

Переправы. 40 очков

В кабине канатной дороги, ведущей на гору, стоят две скамьи. Кабина устроена так, что начинает ехать (неважно, вверх или вниз) только если она загружена от 110 кг до 260 кг, причем масса сидящих на передней скамье и масса сидящих на задней отличаются не более чем на 30 кг. У подножия горы рядом с кабиной стоят туристы массами 50 кг, 75 кг, 75 кг и 100 кг. Как им всем подняться на гору?

Решение

Приведем алгоритм в форме таблицы.

Подножие горы	Кабина			Вершина горы
75	→	Передняя скамья: 50, 75	Задняя скамья: 100	
75	←	Передняя скамья: 75	Задняя скамья: 100	50
100	→	Передняя скамья: 75	Задняя скамья: 75	50
100	←	Передняя скамья: 75	Задняя скамья: 50	75
	→	Передняя скамья: 50, 75	Задняя скамья: 100	75

Метод перебора. 10 очков

У королевы Джозефины есть 17 далматинских пингвинов двух видов: на пингвинах первого вида по 100 пятнышек, а на пингвинах второго вида — по 103 пятнышка. Королева точно знает, что у нее есть пингвины обоих видов. Как-то раз Джозефина решила от скуки пересчитать все пятнышки на своих питомцах и получила 1730. Сколько пингвинов каждого вида есть у королевы?

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Решение

1-й способ

1) 100 · 17 = 1700 (пятн.) — если бы все пингвины были 1-го вида (100-пятнышковые)

2) 1730 – 1700 = 30 (пятн.) — «не хватает»

3) 103 – 100 = 3 (пятн.) — меньше у каждого пингвина 1-го вида, чем у пингвина 2-го вида

3) 30 : 3 = 10 (пинг.) — 2-го вида (103-пятнышковых)

4) 17 – 10 = 7 (пинг.) — 1-го вида (100-пятнышковых)

2-й способ

1) 103 · 17 = 1751 (пятн.) — если бы все пингвины были 2-го вида (103-пятнышковые)

2) 1751 – 1730 = 21 (пятн.) — «лишние»

3) 103 – 100 = 3 (пятн.) — больше у каждого пингвина 2-го вида, чем у пингвина 1-го вида

3) 21 : 3 = 7 (пинг.) — 1-го вида (100-пятнышковых)

4) 17 – 7 = 10 (пинг.) — 2-го вида (103-пятнышковых)

Ответ: 10 пингвинов с 103 пятнышками и 7 пингвинов с 100 пятнышками.

Метод перебора. 20 очков

У царя есть много конюшен, в каждой из которых по 4 коня. Кузьме, Фоме и Ереме было поручено покормить коней. До обеда они успели покормить всех коней в нескольких конюшнях, причем Кузьма покормил больше всех — 19 коней, а Ерема меньше всех — 13. Сколько коней покормил Фома?

Решение

1) 13 + 19 = 32 (к.) — покормили Кузьма и Ерема

2) Пусть k к. — покормили все трое вместе. Это все кони в нескольких конюшнях ⇒ k делится на 4.

3) k делится на 4, $k > 32 \Rightarrow k = \{36, 40, 44, 48, 52, 56, \ldots\}$

4) Пусть Фома покормил f коней. Тогда $13 < f < 19$.

$f = k - 32$

Все накормленные кони (k)	Кони, накормленные Фомой (f)	Подходит под условие $13 < f < 19$?
36	4	нет
40	8	нет
44	12	нет
48	16	да
52 и более	20 и более	нет

Ответ: 16 коней.

Метод перебора. 30 очков

В книжном шкафу находится 50 книг. Бублик и Зяблик взяли из шкафа кратное четырем число книг, разделили на две кучки (не обязательно равные) и прочитали каждый свою кучку. Оказалось, что Бублик прочитал не меньше 5 книг, но все равно в четыре раза меньше Зяблика. Сколько книг осталось в шкафу?

Решение

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

1) Пусть Б кн. — прочитал Бублик; З кн. — прочитал Зяблик; К кн. — всего взято из шкафа (К делится на 4). Тогда в шкафу осталось 50 – К книг.

2) Так как Б в 4 раза меньше З, то З делится на 4. При этом Б ≥ 5, а значит З ≥ 5 · 4 = 20.

3) Всего в шкафу было 50 книг, Бублик получил хотя бы 5 из них ⇒ З ≤ 50 – 5 = 45.

4) 20 ≤ З ≤ 45, З делится на 4 ⇒ З = {20, 24, 28, 32, 36, 40, 44}.

З	Б	К	Подходит под условие «К делится на 4»?
20	5	25	нет
24	6	30	нет
28	7	35	нет
32	8	40	да
36	9	45	нет
40	10	50	нет
44	11	55	нет

Таким образом, подходит единственный вариант, что изначально вытащили 40 книг. Тогда в шкафу осталось 50 – 40 = 10 книг.

Ответ: 10 книг.

Замечание

Перебор вариантов можно значительно сократить, если заметить, что общее число книг К, которые прочитали Бублик и Зяблик, делится на 5 (1 ч прочитал Бублик и 4 ч прочитал Зяблик). Но К делится и на 4, а значит по свойству делимости К делится на 20. Поэтому достаточно перебрать только варианты К = 20 и 40.

Метод перебора. 40 очков

В календаре жителей острова Кума-Кума есть месяцы, состоящие из 31 дня и 35 дней, а всего в году 365 дней. Сколько в году 35-дневных месяцев, если месяцев каждого типа не меньше 4?

Решение

Будем перебирать по количеству 35-дневных месяцев (оно не меньше 4).

35-дневные месяцы (x)	Дней в 35-дневных месяцах ($x \cdot 35$)	Дней в оставшихся месяцах ($365 - x \cdot 35$)	Подходит под все условия?
4	140	225	нет (225 не кратно 31)
5	175	190	нет (190 не кратно 31)
6	210	155	да (будет 155 : 31 = 5 месяцев из 31 дня, 5 > 4)
7 и более	245 и более	48 и менее	нет (не будет четырех месяцев по 31 день)

Ответ: 6 месяцев.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute