

ЗАНЯТИЕ 20. ЧИСЛОВЫЕ ЛЕСЕНКИ

Учебное содержание

Предметные цели

1. Развить представления о переборе вариантов.
2. Тренировать умение разбивать сложную задачу на более простые части.

Задача-ключ



Расставь между некоторыми цифрами в записи 3 3 3 3 знаки арифметических действий и скобки (если нужны) так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 0, 1, 2, ..., 10.

Решение

Приведем возможные варианты выражений. Есть и другие.

$$0 = 33 - 33 \text{ или } 0 = 3 + 3 - 3 - 3 \text{ или } 0 = 3 \cdot 3 : 3 - 3$$

$$1 = 3 : 3 + (3 - 3)$$

$$6 = 3 + 3 + (3 - 3)$$

$$2 = 3 : 3 + 3 : 3$$

$$7 = 3 + 3 + 3 : 3$$

$$3 = 3 + 3 \cdot (3 - 3) \text{ или } 3 = (3 + 3 + 3) : 3$$

$$8 = 3 \cdot 3 - 3 : 3$$

$$4 = (3 \cdot 3 + 3) : 3$$

$$9 = 3 \cdot 3 + (3 - 3) \text{ или } 9 = 3 \cdot 3 - (3 - 3)$$

$$5 = 3 + 3 - 3 : 3$$

$$10 = 3 \cdot 3 + 3 : 3$$

Советы по решению задач с числовыми конструкциями

1. При составлении «числовых лесенок» (то есть выражений, значения которых идут подряд) удобно выделить некоторую **часть** выражения и узнать ее возможные значения.
2. Если придумать правильную конструкцию напрямую не получается, то можно подобрать **последнее** действие, то есть начать решать задачу «с конца».

Вопросы для построения подводящего диалога

1. Какие «помогающие» значения можно получить из 2–3 цифр?
2. Можно ли получить все «ступеньки лесенки», используя «помогающие» числа?
3. Поможет ли прием решения задачи «с конца»?
4. Можно ли получить большее (меньшее) число за счет умножения (деления)?

Основные задания

1. Круглый отличник

Придумай как можно более длинную «числовую лесенку», используя пять пятерок, знаки арифметических действий и скобки.

Подсказка

Запиши подряд пять пятерок. Расставь между некоторыми из них знаки действий и скобки так, чтобы получилось выражение. Найди значение своего выражения.

А теперь попробуй поставить знаки действий и скобки так, чтобы получить сначала число 0, потом число 1, число 2, число 3 и т. д. У твоей числовой лесенки может быть не меньше, чем 14 ступенек (считая число 0).

Решение

Представлены способы получения всех чисел от 0 до 13 включительно. Некоторые числа можно получать разными способами, поэтому примеры нужно проверять.

$$\begin{array}{lll}(5 - 5) \cdot (5 + 5 + 5) = 0 & 5 : 5 + (5 - 5) \cdot 5 = 1 & (5 + 5 + 5 - 5) : 5 = 2 \\(5 \cdot 5 - 5 - 5) : 5 = 3 & 5 - 5 : 5 + 5 - 5 = 4 & 5 + (5 - 5) + (5 - 5) = 5 \\5 : 5 + 5 - 5 + 5 = 6 & 5 + 5 : 5 + 5 : 5 = 7 & 5 + (5 + 5 + 5) : 5 = 8 \\(5 \cdot (5 + 5) - 5) : 5 = 9 & 55 : 5 - 5 : 5 = 10 & 55 : 5 + 5 - 5 = 11 \\55 : 5 + 5 : 5 = 12 & (55 + 5 + 5) : 5 = 13, \text{ и т.д.} & \end{array}$$

2. Подарок султана

Султан пообещал подарить своему визирю столько рубинов, сколько он сможет получить, расставив скобки в выражении:

$$5 \cdot 10 + 20 : 5 + 5$$

Придумай способ, как визирю получить побольше рубинов.

Подсказка

Обрати внимание на умножение.

Решение

Можно получить 95 рубинов, расставив скобки так:

$$5 \cdot (10 + 20 : 5 + 5) = 95.$$

3. Суммирующий аппарат

Корней соорудил аппарат, который выдает на экране сумму чисел на вставленных в него карточках. Если вставить одну карточку, то аппарат покажет число, записанное на карточке. Составь набор из 4 карточек, с помощью которых аппарат выдаст все числа подряд от 1 до как можно большего числа.

Подсказка

Сначала придумай, какие карточки точно нужны для получения самых маленьких чисел.

Решение

Если выбрать карточки с числами 1, 2, 4 и 8, то можно получить любое число от 1 до 15.

$$\begin{array}{lllll}1 = 1 & 2 = 2 & 1 + 2 = 3 & 4 = 4 & 1 + 4 = 5 \\2 + 4 = 6 & 1 + 2 + 4 = 7 & 8 = 8 & 1 + 8 = 9 & 2 + 8 = 10 \\1 + 2 + 8 = 11 & 4 + 8 = 12 & 1 + 4 + 8 = 13 & 2 + 4 + 8 = 14 & 1 + 2 + 4 + 8 = 15\end{array}$$

Ответ: карточки 1, 2, 4 и 8.

Замечание

Можно доказать, что более длинную «лесенку» с помощью четырех карточек соорудить нельзя (доказательство этого факта будет обсуждаться на занятиях в более старших классах, в теме «Количество информации», поэтому не нужно требовать его от учащихся, но если команда утверждает, что смогла сделать большее число, то нужно искать ошибку).

4*. Счастливые числа

Вера считает число *счастливым*, если между некоторыми его цифрами можно поставить знаки действий и скобки так, чтобы значение получившегося выражения было равно 100. Докажи, что число 12345 — счастливое. Найди как можно больше вариантов расстановки скобок и знаков так, чтобы получалось 100.

Подсказка

Подумай, на какие два множителя можно разложить число 100 и как можно получить эти множители. Обрати внимание на то, что знаки не обязательно ставить между всеми цифрами. Некоторые цифры могут стоять рядом и составлять двузначное, трехзначное и т. д. число.

Решение

Приведем некоторые возможные варианты:

$$1 \cdot (2 + 3) \cdot (4 \cdot 5) = 100;$$

$$((1 + 23) - 4) \cdot 5 = 100;$$

$$(1 \cdot 2 + 3) \cdot 4 \cdot 5 = 100.$$

Тренировочные задания

1т. Хорошист

Расставь скобки и знаки арифметических действий между некоторыми цифрами так, чтобы равенства были верными:

$$4\ 4\ 4\ 4\ 4 = 10$$

$$4\ 4\ 4\ 4\ 4 = 11$$

$$4\ 4\ 4\ 4\ 4 = 12$$

$$4\ 4\ 4\ 4\ 4 = 13$$

$$4\ 4\ 4\ 4\ 4 = 14$$

Решение

Возможны разные варианты решения, например:

$$44 : 4 - 4 : 4 = 10$$

$$44 : 4 - 4 + 4 = 11$$

$$44 : 4 + 4 : 4 = 12$$

$$4 + 4 + 4 + 4 : 4 = 13$$

$$4 \cdot 4 - (4 + 4) : 4 = 14$$

2т. Подарок султана

Милость султана к визирю была недолгой. И через 2 часа он приказал отнять у визиря столько подаренных ему рубинов, сколько получится, когда он расставит скобки в выражении:

$$7 \cdot 6 + 18 : 3 - 1$$

Придумай, как визирю сохранить как можно больше рубинов.

Решение

Можно расставить скобки так, чтобы у визиря забрали всего 19 рубинов:

$$(7 \cdot 6 + 18) : 3 - 1 = 19.$$

3т. Суммирующий аппарат

У Маши есть 3 пустые цветные карточки и много карточек со знаками «+» и «-». Помоги ей написать на пустых карточках по одному числу так, чтобы она смогла составить из своих карточек выражения с любым значением от 1 до 9.

Решение

1-й способ

1

3

5

$$1 = 1$$

$$2 = 3 - 1$$

$$3 = 3$$

$$4 = 3 + 1$$

$$5 = 5$$

$$6 = 1 + 5$$

$$7 = 3 - 1 + 5$$

$$8 = 3 + 5$$

$$9 = 1 + 3 + 5$$

2-й способ

2

3

6

$$1 = 3 - 2$$

$$2 = 2$$

$$3 = 3$$

$$4 = 6 - 2$$

$$5 = 6 + 2 - 3$$

$$6 = 6$$

$$7 = 6 + 3 - 2$$

$$8 = 6 + 2$$

$$9 = 6 + 3$$

4т*. Счастливые число

Витя считает число счастливым, если между некоторыми его цифрами можно поставить знаки действий и скобки так, чтобы значение получившегося выражения было равно 100. Докажи, что число 7654321 — счастливое.

Решение

Приведем два возможных варианта:

$$7 + 6 + 54 + 32 + 1 = 100$$

$$(7 - 6) \cdot (5 \cdot 4) \cdot (3 + 2) \cdot 1 = 100$$

Дополнительные задания

5. Счастливые число–2

Полина, соседка Веры по парте, доказала, что число 123456 тоже является счастливым (см. № 4т*). А ты сможешь это сделать?

Подсказка

Сначала попробуй составить число 99.

Решение

Один из возможных вариантов:

$$1 + (2 + 3 + 4) \cdot (5 + 6) = 100.$$

6. Продавец арбузов

а) У продавца арбузов есть чашечные весы. Он хочет купить к ним набор из 5 гирь массой в несколько килограммов так, чтобы можно было с их помощью отвесить любой груз от 1 кг до 21 кг. На одну чашку весов одновременно можно поставить не более трех гирь (из тех, которые приобретет). Определи, какие гири подойдут продавцу арбузов.

б*) Реши ту же задачу, но при условии, что выбранный набор из 5 гирь позволит продавцу взвесить любой груз массой от 1 кг до 23 кг.

Подсказка

Другими словами, надо получить любое число от 1 до 21 (или от 1 до 23), взяв либо одно из 5 чисел набора, либо сумму не более трех чисел этого набора.

Решение

а) Подойдет набор 1, 2, 4, 8, 15.

$1 + 2 = 3$	$1 + 4 = 5$	$2 + 4 = 6$	$1 + 2 + 4 = 7$	$1 + 8 = 9$
$8 + 2 = 10$	$1 + 2 + 8 = 11$	$4 + 8 = 12$	$1 + 4 + 8 = 13$	$2 + 4 + 8 = 14$
$1 + 15 = 16$	$2 + 15 = 17$	$1 + 2 + 15 = 18$	$4 + 15 = 19$	$1 + 4 + 15 = 20$
				$2 + 4 + 15 = 21$

б) Подойдет набор 1, 2, 4, 7, 14.

$1 + 2 = 3$	$1 + 4 = 5$	$2 + 4 = 6$	$1 + 7 = 8$	$2 + 7 = 9$
$1 + 2 + 7 = 10$	$4 + 7 = 11$	$1 + 4 + 7 = 12$	$2 + 4 + 7 = 13$	$1 + 14 = 15$
$2 + 14 = 16$	$1 + 2 + 14 = 17$	$4 + 14 = 18$	$1 + 4 + 14 = 19$	$2 + 4 + 14 = 20$
$7 + 14 = 21$	$1 + 7 + 14 = 22$	$2 + 7 + 14 = 23$		

Ответ: а) 1, 2, 4, 8, 15; б) 1, 2, 4, 7, 14.

Сценарий занятия

Метапредметные цели



Тренировать умение применять метод ролей при решении задач (роли разведчика, мастера, навигатора и эксперта).



Закрепить умение составлять план и действовать по плану.

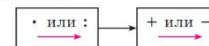
Опорные знания

1. Порядок действий в выражениях¹.

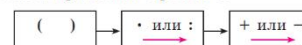
Материалы и оборудование

- На класс:**
- презентация;
 - эталоны «Я — актер, я — зритель»², «Учимся задавать вопросы»³, «Правила работы в группе»⁴.
- На группу:**
- листы-заготовки для демонстрации ответов в игре «Числовая лесенка» в файле;
 - листы-заготовки для демонстрации решений на этапе «Сцена» в файле;
 - маркеры для записи на папках-файлах и губка для стирания записей.
- У ученика:**
- учебное пособие на печатной основе «Математический театр, 3 класс»⁵,
 - планшетки (папка-файл с вложенным листом-заготовкой);
 - черновик, тетрадь.

Правило 1. Если в выражении нет скобок, то сначала выполняют умножение или деление, а потом – сложение или вычитание (слева направо).



Правило 2. Если в выражении есть скобки, то сначала выполняют действия в скобках, а затем применяют Правило 1.



Методическая справка

Данное занятие посвящено составлению **числовых конструкций**. Большая его часть организуется в игровой форме, так что школьники могут использовать *метод ролей* самостоятельно при возникновении затруднений в решении задач.

При решении любых задач на конструирование особое значение имеют роли **разведчика**, **навигатора**, **мастера** и **эксперта**. *Навигатор*, опираясь на взаимосвязи между объектами задачи и идеи, определенные *разведчиком*, выстраивает общий подход к поиску необходимого примера. В данном занятии предлагается использовать три таких возможных подхода (первые два из них реализуют разбиение задачи на подзадачи):

- «вспомогательные» конструкции;
- анализ «с конца»;
- идею подбора случайного варианта с его последующим «исправлением».

Мастеру нужно выбрать наиболее удобный подход для рассматриваемой задачи. Его работа усложняется тем, что заранее трудно определить, какой подход даст желаемый результат, поэтому может потребоваться попробовать разные варианты.

После того, как *мастер* составил конструкцию, *эксперту* необходимо внимательно проверить ее на соответствие всем условиям задачи. Это особенно важно в задачах о составлении рядов выражений с определенными значениями («**числовых лесенок**»), поскольку ошибка в одном из начальных выражений прерывает такой ряд.

¹ Петерсон Л.Г., Кубышева М.А. Построй свою математику: Блок-тетрадь эталонов для 2 класса по программе «Учусь учиться». — М.: Институт СДП, 2015. С. 67.

² Данное пособие, 7_Занятие 6, часть 1 «Путешествие с числами».

³ Данное пособие, 4_Игра 1 «Мастера математики».

⁴ Мир деятельности. Методические рекомендации к надпредметному курсу. 1 класс / Под ред. Л.Г. Петерсон. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2018. С. 116–124.

⁵ Петерсон Л.Г. Математический театр: учебное пособие по олимпиадной математике для 3 класса. — Л.Г. Петерсон, О.Н. Агаханова. — М.: Институт СДП, 2021.

Ход занятия

1 Математическое фойе	2 Творческая мастерская	3 Сцена	4 Антракт	5 Выход на бис	6 Зеркало
25 мин	10 мин	25 мин	5 мин	10 мин	5 мин

С-3

**1. Математическое фойе (25 мин)**

– Ребята, посмотрите на условие задания и ответьте, что в нем требуется сделать. (Расставить вместо звездочек знаки арифметических действий так, чтобы получилось верное равенство⁶.)

16

+

-

:

·

5 * 3 * 4 = 11

12 * 3 * 4 = 8

30 * 3 * 7 = 9

8 * 2 * 7 = 28

18 * 6 * 2 = 30

14 * 7 * 2 = 0

20 * 5 * 6 = 24

5 * 8 * 4 = 36

2 * 9 * 3 = 21

– Встречались ли вам подобные задания? Вспомните, какие приемы помогают их решить. (Да, встречались. Например, можно подбирать знаки по очереди и проверять, получается ли верное равенство.)

С-4

– Хорошо, сейчас все те, кто уже знают такие приемы, продемонстрируют свои знания, а те, кто не знают — попробуют их придумать. Однако задание будет немного отличаться. Вспомните, какие еще знаки могут разделять числа в примере. (Скобки.)

– Вспомните, как определить порядок действий в выражении без скобок и со скобками.

С-5

▲ Учащиеся озвучивают правила выполнения действий и проверяют себя по эталону.

С-6

– Разбейтесь сейчас на группы по 3–4 человека для участия в соревновании «Числовая лесенка».

▲ Школьники разбиваются на группы по 3–4 человека и при необходимости повторяют правила работы в группе.

С-7

– В вашем распоряжении будут четыре тройки. Между некоторыми из этих цифр можно ставить знаки арифметических действий и скобки.

3 3 3 3

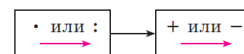
С-8

Целью игры будет придумать как можно более длинную «лесенку», значениями выражений в которой будут подряд идущие числа, начиная с нуля. Я начну: вот выражение, содержащее четыре цифры 3, между некоторыми из них можно поставить знаки действий и скобки (если нужно) так, чтобы его значение равнялось 0:

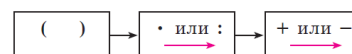
$$0 = 33 - 33 \text{ или } 0 = 3 + 3 - 3 - 3 \text{ или } 0 = 3 \cdot 3 : 3 - 3$$

– В примере даны три разных способа получения нуля. Обратите внимание, что для каждого числа вам будет *достаточно* привести одно выражение с нужным значением. Вы также можете видеть, что, если между несколькими цифрами не стоят знаки действий, получается число

Правило 1. Если в выражении нет скобок, то сначала выполняют умножение или деление, а потом – сложение или вычитание (слева направо).



Правило 2. Если в выражении есть скобки, то сначала выполняют действия в скобках, а затем применяют Правило 1.



⁶ Петерсон Л.Г., Математика. 2 класс: учебник: в 3 ч. Ч.3. С. 7, №16.

(например, две записанные рядом тройки образуют число 33). Есть ли вопросы по правилам составления выражений в игре? (Ответы детей.)

С-9

– Итак, вам нужно придумать целую «лесенку» таких выражений из четырех троек. То есть значение первого выражения должно быть равно 1, второго — 2, третьего — 3, и так далее. Пропускать числа-ступеньки нельзя. Сначала составьте очередное выражение на черновике, а затем запишите итоговый проверенный вариант маркером на планшете («Лист-заготовка для игры», вставленный в файл). Записывайте выражения для разных чисел вертикально по порядку сверху вниз. У вас есть 3 минуты, чтобы придумать как можно более длинную «лесенку» без пропуска ступенек!

▲ Школьники придумывают свои «лесенки» и записывают знаки действий и скобки рядом с тройками водным маркером на папке-файле, чтобы при необходимости стереть неверный вариант. Учащимся следует напомнить, что записи следует делать понятно, достаточно крупно, аккуратно. По истечении указанного времени представители команд демонстрируют свои «лесенки». Используя взаимопроверку, команды проверяют правильность получившихся равенств.

С-10

В этой игре можно получить все числа от 0 до 10 включительно. Приведем по 1–2 примера для каждого числа (существуют и другие; выражения со значением 0 даны ранее в тексте):

$$1 = 3 : 3 + (3 - 3)$$

$$6 = 3 + 3 + (3 - 3)$$

$$2 = 3 : 3 + 3 : 3$$

$$7 = 3 + 3 + 3 : 3$$

$$3 = 3 + 3 \cdot (3 - 3) \text{ или } 3 = (3 + 3 + 3) : 3$$

$$8 = 3 \cdot 3 - 3 : 3$$

$$4 = (3 \cdot 3 + 3) : 3$$

$$9 = 3 \cdot 3 + (3 - 3) \text{ или } 9 = 3 \cdot 3 - (3 - 3)$$

$$5 = 3 + 3 - 3 : 3$$

$$10 = 3 \cdot 3 + 3 : 3$$

По окончании взаимопроверки подводятся итоги и определяется группа (группы), которая смогла составить самую длинную «лесенку» без пропусков. Затем этой группе (или группам), предлагается ответить на вопрос о том, что помогло ей (им) выполнить задание.

▲ **Учителю на заметку.** В случае, если у большинства групп не получилось составить длинную «числовую лесенку» или если они не могут сформулировать прием, который помог им в составлении, рекомендуется разобрать задачу методом ролей (см. с. 10-12).

С-11

– Итак, вы правильно заметили, что при составлении выражений полезно использовать **«помогающие» числа**. В записи своих выражений найдите и подчеркните «помогающие» выражения. ($0 = 3 - 3$, $1 = 3 : 3$.)

– Действительно, с помощью двух троек можно сделать 0 и 1, и этими числами потом удобно пользоваться. Так вы упростили себе задачу. Но не все числа можно получить таким способом. Какие еще приемы составления выражений вы придумали? (Ответы детей.)

С-12

– Иногда полезно порассуждать, каким может быть последнее действие. Например, число 4 — это $12 : 3$, а значит достаточно просто придумать способ, как из трех троек «собрать» число 12. В математике такой прием называют решением **«с конца»**. Знаете ли вы другие задачи, где помогает рассуждение «с конца»? (Задачи про отгадывание задуманного числа; задачи на переливание.)

С-13

– Как вы назовете сегодняшнюю тему? (Например: числовые конструкции, расстановка знаков, математические «лесенки».)

– В пособии это занятие названо «Числовые лесенки». Откройте пособие на с. 90 и попробуйте заполнить пропуски в советах по решению задач.

С-14

Советы по решению задач с числовыми конструкциями

1. При составлении «числовых лесенок» (то есть выражений, значения которых идут подряд) удобно выделить некоторую _____ выражения и узнать ее возможные значения.
2. Если придумать правильную конструкцию напрямую не получается, то можно подобрать _____ действие, то есть начать решать задачу «с конца».

▲ Школьники заполняют пропуски и согласовывают вставки по образцу на с. 108 пособия. Учитель демонстрирует на слайде итоговый вариант советов:

С-15

Советы по решению задач с числовыми конструкциями

1. При составлении «числовых лесенок» (то есть выражений, значения которых идут подряд) удобно выделить некоторую **часть** выражения и узнать ее возможные значения.
2. Если придумать правильную конструкцию напрямую не получается, то можно подобрать **последнее** действие, то есть начать решать задачу «с конца».

С-16

– Все молодцы! Какую цель вы поставите на сегодняшнее занятие? (Например: придумать новые приемы для поиска правильной расстановки скобок и знаков.)

С-17



2. Творческая мастерская (10 мин)

Занятие по поиску математических конструкций предлагается проводить в форме соревнования между группами.

С-18

Дети распределяются в пары либо группы (желательно составить 6 пар или групп, чтобы сохранить логику соревнований). Учитель предлагает каждой группе одно из 4 заданий (одно задание — запасное), соотнося уровень подготовки детей и сложность заданий. Таким образом, каждое задание получают две группы. Если количество групп окажется больше, чем количество заданий, то задания можно продублировать.

С-19

Группы (пары) в течение 5 мин группы пробуют самостоятельно выполнить свое задание.

Учитель при необходимости направляет действия детей в группе, рекомендуя им обратить особое внимание на исполнение роли **эксперта**. Учащиеся решают задания в тетрадях (на черновиках), а затем записывают итоговые варианты на «Листе-заготовке для этапа «Сцена».

С-20



3. Сцена (25 мин)

После выполнения заданий представители двух групп, получивших одно задание, оглашают получившийся у них ответ. Затем представители групп демонстрируют свои варианты на доске, и выполняют взаимопроверку.

С-21

Если одна из команд находит ошибки, то представителю другой команды предлагается исправить их сразу на месте. Также на ошибку может указать любой другой внимательный зритель. После взаимопроверки команды подводят итог: побеждает та команда, которая получила лучший ответ (самую длинную «лесенку», самое большое значение выражения, и т.д.; считаются, конечно, только верные варианты). В случае, если же команды и зрители не нашли имеющиеся ошибки, учитель помогает их обнаружить с помощью *подводящего диалога*.

С-22-24

1. Круглый отличник (6 мин)

Придумай как можно более длинную «числовую лесенку», используя пять пятерок, знаки арифметических действий и скобки.

С-25-26

2. Подарок султана (4 мин)

Султан пообещал подарить своему визирю столько рубинов, сколько он сможет получить, расставив скобки в выражении:

$$5 \cdot 10 + 20 : 5 + 5$$

Придумай способ, как визирю получить побольше рубинов.

С-27-29

3. Суммирующий аппарат (8 мин)

Корней соорудил аппарат, который выдает на экране сумму чисел на вставленных в него карточках. Если вставить одну карточку, то аппарат покажет число, записанное на карточке. Составь набор из 4 карточек, с помощью которых аппарат выдаст все числа подряд от 1 до как можно большего числа.

С-30-32

4*. Счастливые число (7 мин)

Вера считает число *счастливым*, если между некоторыми его цифрами можно поставить знаки действий и скобки так, чтобы значение получившегося выражения было равно 100. Докажи, что число 12345 — счастливое. Найди как можно больше вариантов расстановки скобок и знаков так, чтобы получалось 100.

А**4. Антракт (5 мин)**

— Расскажите, какие задания вы выполняли на сегодняшнем занятии? (Мы составляли «лесенки» числовых выражений по заданным условиям.)

С-33

— Какие советы по составлению числовых выражений с определенными свойствами вы бы хотели себе дать? (Например, попробовать разложить требуемый ответ на множители и затем подумать, как можно получить эти множители.)

С-34

— Какие числа на карточках помогли составить наиболее длинную «числовую лесенку» в задаче 3? (Ответы детей.)

— Как вы думаете, можно ли получить более длинную лесенку в этой задаче? (Ответы детей.)

— А бесконечно длинную «лесенку»? Почему? (Нет, так как всего существует конечное число способов выбрать карточки для сложения.)

— На сегодняшнем занятии вы только пробовали составить как можно более длинную «лесенку». В дальнейшем мы научимся находить наибольшую возможную длину лесенки, например, в таких задачах, как № 3. На разыгрывание каких ролей вам следует обратить внимание при самостоятельном построении числовых конструкций и почему? (Например: на роль эксперта, поскольку важно проверить правильность конструкции.)

Бис**5. Выход на бис (10 мин)**

Учитель организует самостоятельное решение 1–2 тренировочных задач на с. 92–93 пособия по выбору учащихся в течение 5–6 минут. После решения задач дети сами проверяют свои конструкции на соответствие всем условиям задачи. При проверке можно пользоваться вариантами решений на с. 143, однако следует помнить, что существуют и другие варианты.

С-35

С-36

С-37

При возникновении затруднений в проверке учитель помогает, выстраивая *подводящий диалог*. Взаимопроверка на данном этапе не рекомендуется, поскольку важно дать учащимся опыт в самостоятельном разыгрывании роли *эксперта* на своих решениях.

С-38

С-39

С-40

3

6. Зеркало (5 мин)

Учитель организует рефлексию работы учащихся на занятии. Итоги рефлексии ученики фиксируют в пособии.



- Какую цель вы сегодня ставили на занятии? Достигли ли вы этой цели?
- Какие роли вам помогли лучше понять решение задач?
- Какие задачи вам показались самыми интересными, красивыми? Расскажите о них.
- Какой совет себе самому вы хотите дать? Запишите в разделе «Выводы».
- С каким настроением вы сегодня решали задачи? Нарисуйте свое отражение в зеркале.

Для педагогов, работающих в ТДМ


Основные структурные элементы занятия

1. **Новое знание.** Способ «вспомогательных значений» при построении числовых конструкций.
2. **Пробное действие.** Попробуй придумать «числовую лесенку» из 10 ступенек, использующую четыре тройки.
3. **Возможные затруднения.** «Я не смог получить все значения от 1 до 10.»
4. **Фиксация причины затруднения.** «Я не знаю, как получить некоторые числа.»
5. **Цель деятельности.** Узнать способ составления «числовой лесенки».
6. **Фиксация нового знания.** При решении задач с «числовыми лесенками» удобно использовать «вспомогательные значения».

Разбор ключевой задачи с помощью метода ролей

Задача. Расставь между некоторыми цифрами в записи 3 3 3 3 знаки арифметических действий и скобки (если нужны) так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 0, 1, 2, ..., 10.		
Роль	Ключи	Исполнение роли учителем и учениками
ФОТОГРАФ 	КАРТИНКА	У меня есть четыре карточки с цифрой «3», а также карточки со знаками арифметических действий и скобками. Я хочу расположить карточки так, чтобы получились выражения с данными значениями.
	УСЛОВИЕ, ВОПРОС (ТРЕБОВАНИЕ)	<p>Условие: 1) запись 3 3 3 3; 2) между некоторыми (значит, не обязательно всеми) цифрами можно ставить знаки арифметических действий и скобки; 3) после расстановки знаков и скобок получается некоторое выражение; 4) скобки можно не использовать.</p> <p>Вопрос: Как расставить знаки и скобки, чтобы получились выражения со всеми значениями 0, 1, 2, ..., 10?</p>
РАЗВЕДЧИК 	ВЗАИМОСВЯЗИ	<p>1) При прибавлении трех или умножении на три натуральное число увеличивается, а при вычитании трех или делении на три — уменьшается.</p> <p>2) Если значение выражения равно нулю, то оно не изменится при умножении или делении на 3. Если прибавить к числу ноль или вычесть ноль, число не изменится.</p>

		<p>3) Если поставить между всеми тройками знак «+», то получится число 12, которое больше самого большого из требуемых (если поставить всюду знак умножения, то получится еще большее число). Значит, для получения чисел от 0 до 10 нужно использовать знаки вычитания и деления.</p> <p>4) Если между двумя тройками не поставить знак, то они образуют двузначное число 33.</p>
	ИДЕИ, ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ	<p>1) При получении «новых» чисел по счету можно попробовать использовать те же приемы, которые помогли получить меньшие числа.</p> <p>2) Можно составлять «помогающие» числа из меньшего 4 числа троек (например, ноль или единицу).</p> <p>3) Не обязательно получать все числа по порядку. Можно просто расставить знаки (и скобки) произвольным образом и вычислить значение получаемого выражения, а затем попробовать «исправить» выражение так, чтобы его значение было равно требуемому.</p>
<p>ПЕРЕВОДЧИК</p> 	МОДЕЛЬ (известная или своя)	<p>Модель дана в условии задачи — это запись из четырех троек. Удобно записывать тройки на некотором расстоянии друг от друга, чтобы можно было вместить между ними знаки и скобки.</p>
<p>НАВИГАТОР</p> 	ПРАВИЛА, СВОЙСТВА, ПОДХОД	<p>1) Из двух троек можно составить выражение, значение которого равно 0 и 1. Эти «помогающие» значения можно использовать при построении итогового выражения.</p> <p>2) Для каждого значения, которое нужно получить, можно пойти «с конца», то есть предположить, каким могло быть последнее действие и попробовать составить компоненты этого действия (например, для получения числа 7 можно к 4 прибавить 3, то есть получится составить выражение, если найдется какой-то способ получения 7 из трех троек).</p>
	ПЛАН РЕШЕНИЯ	<p>1. Составить «помогающие» значения из двух троек (например, 0 и 1).</p> <p>2. Для каждого значения выражения понять, каким могло быть последнее действие и попробовать составить компоненты этого действия.</p> <p>3. Если придумать выражение с данным значением не получается, попробовать расставить знаки и скобки «наугад», вычислить получаемое значение выражения и узнать, как его можно исправить.</p>
<p>МАСТЕР</p> 	РЕШЕНИЕ, ОФОРМЛЕНИЕ	<p>Ученики, действуя по плану, строят требуемые выражения.</p> <p>Приведем два иллюстрирующих эту работу по плану варианта рассуждения для получения значения «0».</p> <p><i>Возможные рассуждения:</i></p> <p>1-й способ</p> <p>Выражение, равное нулю, легко построить, используя две тройки: $0 = 3 - 3$. Суммируя два таких выражения, получим выражение, значение которого также равно нулю, но в котором уже четыре тройки: $0 = (3 - 3) + (3 - 3)$.</p> <p>2-й способ</p>

		<p>Разность двух одинаковых чисел равна 0. Поэтому последним действием может быть вычитание двух одинаковых чисел. Из четырех цифр 3 можно составить два равных числа 33. Получится выражение: $0 = 33 - 33$.</p> <p><i>Запись варианта решения:</i></p> $0 = (3 - 3) + (3 - 3)$ $1 = 3 : 3 + (3 - 3) \qquad \qquad \qquad 6 = 3 + 3 + (3 - 3)$ $2 = 3 : 3 + 3 : 3 \qquad \qquad \qquad 7 = 3 + 3 + 3 : 3$ $3 = 3 + 3 \cdot (3 - 3) \qquad \qquad \qquad 8 = 3 \cdot 3 - 3 : 3$ $4 = (3 \cdot 3 + 3) : 3 \qquad \qquad \qquad 9 = 3 \cdot 3 + (3 - 3)$ $5 = 3 + 3 - 3 : 3 \qquad \qquad \qquad 10 = 3 \cdot 3 + 3 : 3$
<p>ЭКСПЕРТ</p> 	<p>ПРОВЕРКА РЕШЕНИЯ И ОТВЕТ</p>	<p>1) Нужно проверить, что все значения выражений найдены верно. 2) Также требуется проверить, что предложены выражения для каждого из 11 значений от 0 до 10.</p>
	<p>ВЫВОДЫ</p>	<p>Возможные вопросы</p> <p>– Какие выводы вы сделали при решении задачи-ключ?</p> <p>(1. Для составления «числовых лесенок» можно использовать «помогающие» значения, составленные с помощью меньшего количества цифр. 2. Если составить конкретное значение не получается, можно расставить знаки действий и скобки некоторым способом и затем попробовать изменить запись выражения так, чтобы получилось нужное значение.)</p> <p>– Какие еще числа можно составить с помощью четырех троек, знаков арифметических действий и скобок? (Например, $33 = 33 + 3 - 3$, $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, и т.д.)</p> <p>– Внимательное проигрывание каких ролей помогло вам решить задачу? (...)</p>