

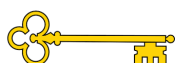
## ЗАНЯТИЕ 18. РАСКРАСКИ ДОСОК

### Учебное содержание

#### Предметные цели

1. Развить представления о методе «проб и ошибок» и принципе «узких мест» при решении геометрических задач.
2. Познакомить учащихся с «шахматной» раскраской досок других форм и размеров, чем обычная шахматная, с «диагональной» раскраской.
3. Сформировать представления об оптимальном решении<sup>1</sup> и доказательстве оптимальности.

#### Задача-ключ



Заполните клетки таблицы  $5 \times 5$  цифрами от 1 до 5 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце цифры не повторялись.

#### Решение

Приведем один из способов расстановки, соответствующий «диагональной» раскраске:

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

#### Советы по раскраске досок

1. Удобно начать раскрашивать с «узкого места» — элемента, у которого **мало или много (больше или меньше всего)** связей с другими (то есть общих границ, или столбцов, или строк).
2. Чтобы заполнить таблицу цифрами (или раскрасить в несколько цветов) так, чтобы цифры (цвета) в строках и столбцах не повторялись, можно ставить одинаковые цифры (цвета) **по диагонали**.

#### Вопросы для построения подводящего диалога

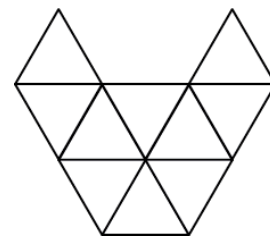
1. У какой клетки (у каких клеток) меньше всего связей?
2. А больше всего связей?
3. Для какой клетки меньше всего вариантов?

<sup>1</sup> Под «оптимальным» решением здесь подразумевается решение с наименьшим возможным значением некоторой величины (например, раскраска наименьшим количеством цветов в задачах 1, 1т).

## Основные задания

### 1. Витраж

Витраж состоит из одинаковых по размеру и форме треугольных кусочков стекла (см. рисунок). Раскрась его наименьшим количеством цветов так, чтобы треугольники с общей стороной были разного цвета.

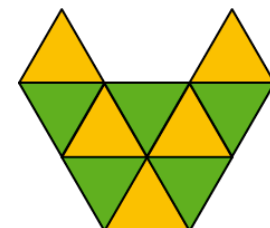


#### Подсказка

Начни раскрашивать с одного из «ушей».

#### Решение

Единственная возможная раскраска (с точностью до цветов) — на рисунке. Эта раскраска является аналогом шахматной раскраски обычной шахматной доски.



Раскрасить все треугольники одним цветом не получится, так как тогда обязательно найдутся одноцветные кусочки с общей стороной (например, самый верхний треугольник и его «сосед» снизу\*).

#### Путь к решению

Получить раскраску данного витража в два цвета (и доказать ее единственность) можно, начав с «узкого места», например, с одного из «ушей» (верхних треугольников). Если верхний треугольник будет иметь 1-й цвет, то треугольник под ним другой (2-й) цвет. «Сосед» этого треугольника будет иметь снова 1-й цвет, а его соседи — 2-й цвет. Так, рассматривая по очереди новых «соседей», получим единственную возможную раскраску.

Можно подойти к решению и по-другому: в качестве «узкого места» рассмотреть треугольник, у которого больше всего соседей (3), и начать раскраску с него.

#### Замечание\*

При доказательстве оценок в задачах на досках часто используется прием рассмотрения «особенных» клеток, которые не могут оказаться в одной группе (например, быть одного цвета, быть побиты одной фигурой, и т. д.).

### 2. Фигуры

Перед тобой 16 фигур. Раскрась их, используя 4 цвета, и расставь в таблице  $4 \times 4$  так, чтобы в каждом столбце и каждой строке не повторялись ни цвета, ни формы. (Фигуры одной формы могут быть одного цвета.)

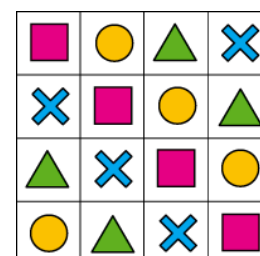


#### Подсказка

Вспомни задание про расстановку цифр в квадрате  $5 \times 5$ .

#### Решение

Раскрасим все квадраты в фиолетовый цвет, все круги — в желтый, все треугольники — в зеленый, а все крестики — в синий. Тогда их можно будет расставить «диагонально»:



#### Замечание

Существуют и другие решения задачи. Например, фигуры с указанной выше расстановкой можно раскрасить по другой диагонали (см. рис. а).

Можно рассмотреть и существенно более сложный вариант данной задачи, если заранее потребовать в условии, чтобы каждый тип фигур был покрашен во все 4 цвета. По сути, это будет задачей на составление греко-латинского квадрата размерами  $4 \times 4$  (см. рис. б):

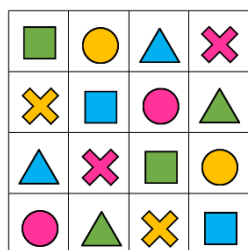


рис. а)

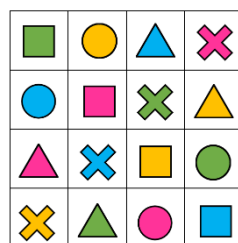
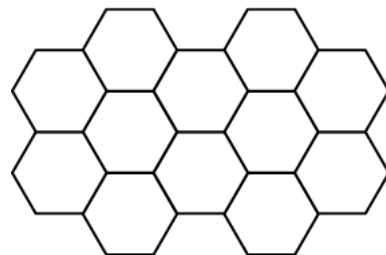


рис. б)

### 3. Пчелиная история

Королева пчел повелела раскрасить соты в улье так, чтобы соты с общей стенкой всегда были разного цвета. Попробуй раскрасить эти соты, используя как можно меньше разных цветов.

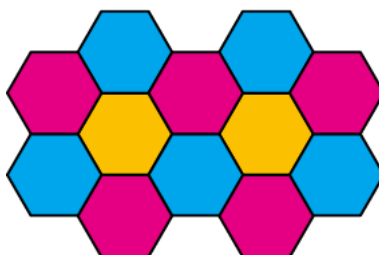


#### Подсказка

Начни раскрашивать с середины «цветка» — с элемента, у которого много соседей.

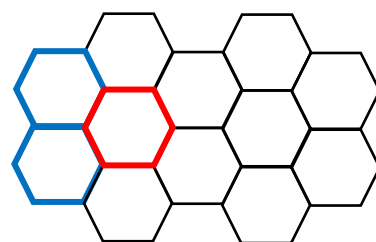
#### Решение

Пример раскраски в три цвета — на рисунке.



#### Замечание

С сильной группой нужно обязательно обсудить, почему меньшим количеством цветов обойтись нельзя. Двух цветов, как в задаче 1, не хватит. Если рассмотреть внутренний шестиугольник (выделен красным цветом) и двух его «соседей» (отмечены синим цветом), то можно понять, что на покраску этих трех сот двух цветов не хватит. Значит, понадобится хотя бы три цвета.



### 4. Диагонали

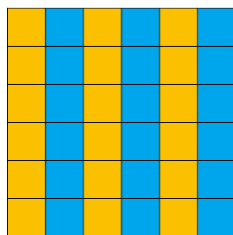
Раскрась каждую клетку доски  $5 \times 5$  в желтый или синий цвет так, чтобы соседние по диагонали клетки были разного цвета, а клетки через одну по диагонали — одинакового цвета.

#### Подсказка

Начни раскрашивать с угловой клетки. Цвет каких клеток ты можешь определить, если знаешь цвет угловой клетки?

#### Решение

Один из возможных вариантов решения — на рисунке.



### Путь к решению

Начнем раскрашивать с угловой клетки. Пусть левая верхняя клетка — желтая. Тогда сразу раскрасим желтым те клетки, которые идут через одну по диагонали, а синим — соседние по диагонали (см. рис. а).

Раскрасим «соседей» синих клеток по диагонали в желтый цвет (см. рис б).

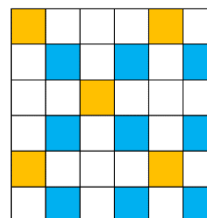


рис. а

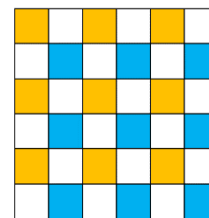


рис. б

Раскрасим любую из оставшихся клеток в желтый цвет. Продолжим раскраску по правилам и получим полностью раскрашенную доску, как в решении.

### Замечание

Полученная раскраска доски называется «полосатой» или раскраской «матрасом». Такую раскраску в дальнейшем можно будет использовать при решении задач на доказательство на клетчатых досках.

## 5\*. Крестики-нолики

Расставь 20 крестиков на доске  $6 \times 6$  так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не стояли 3 крестика подряд, и при этом в первой, второй, пятой и шестой строках было по 4 крестика, а в третьей и четвертой — по 2 крестика.

### Подсказка

Начни «с угла». Как поставить крестики, чтобы они не шли 3 подряд, но в одной строке получалось 4 или 2 крестика?

### Решение

Один из возможных примеров — на рисунке.

×	×			×	×
×	×			×	×
		×	×		
		×	×		
×	×			×	×
×	×			×	×

### Путь к решению

Начнем расстановку «с угла». Числа 2 и 4 — четные, при этом нельзя ставить 3 крестика подряд. Поэтому будем ставить крестики по парам. Отметим серым клетки, которые при этом обязательно должны остаться пустыми.

×	×				
×	×				

Для того, чтобы в первой и второй строках оказалось по 4 крестика, можно повторить такой же узор в правой части:

Заметим, что в третьей строке остались только две клетки, в которые можно поставить крестики. Заполним их и повторим расстановку в четвертой строке. Оставшиеся 8 крестиков можно поставить в углах так же, как и в верхней половине рисунка. Прделаав это, получим пример как в решении.

×	×			×	×
×	×			×	×

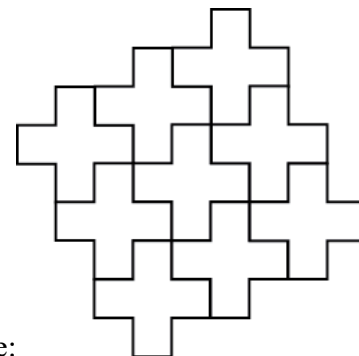
### Замечание

В примере получилась так называемая «крупная шахматная» раскраска: шахматная раскраска доски, где своеобразными укрупненными клетками являются квадратики размера  $2 \times 2$ . Такая раскраска, наряду с обычной шахматной, часто используется при решении задач.

## Тренировочные задания

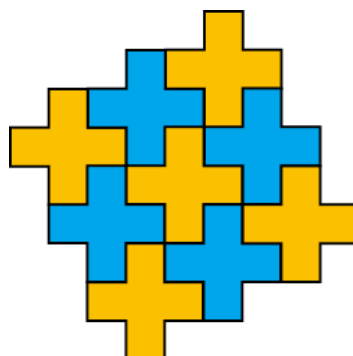
### 1т. Плюсландия

Страна Плюсландия делится на области, которые имеют форму плюсов. Раскрась карту этой страны в наименьшее число цветов так, чтобы области, имеющие общий участок границы, были разного цвета.



### Решение

Данную карту можно раскрасить в два цвета в «шахматном» порядке:



### 2т. Фигуры

Расположи три квадрата, три круга и три треугольника в клетках таблицы  $3 \times 3$  так, чтобы в строках и столбцах не повторялись ни цвета, ни формы.



### Решение

Можно расставить фигуры диагонально, а потом раскрасить их:

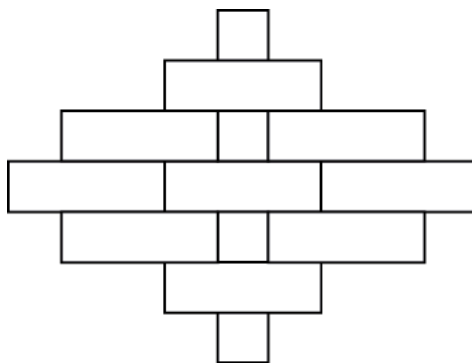
### Замечание

Если посмотреть на ту же задачу для таблицы  $4 \times 4$  и фигур четырех видов и цветов, то простая «диагональная» расстановка фигур уже не подойдет (см. замечание к задаче № 2). Такую задачу можно предложить в качестве дополнительной.

■	●	▲
▲	■	●
●	▲	■

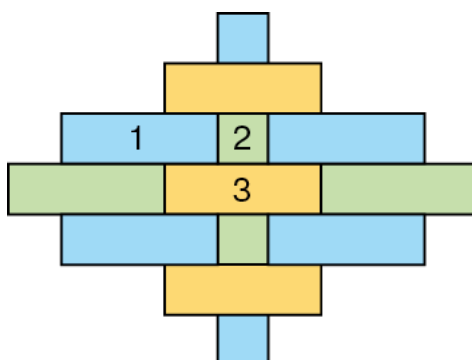
### 3т. Кирпичики

Федор собрал из кирпичиков фигуру как на рисунке, причем кирпичики одного цвета не соприкасаются гранями. Раскрась эти кирпичики в наименьшее возможное количество цветов и объясни, почему нельзя обойтись меньшим числом цветов.



### Решение

Можно раскрасить кирпичики в три цвета. Раскрасить фигуру меньшим количеством цветов не удастся так как кирпичики с номерами 1, 2, 3 должны быть разного цвета.

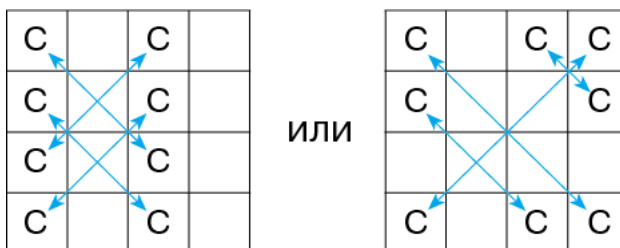


### 4т. Немирные слоны

Расставь 8 слонов на доске  $4 \times 4$  так, чтобы каждый слон бил ровно одного другого слона. Попробуй найти несколько вариантов расстановки. (Слон бьет все клетки диагоналей, на которых стоит, но не может бить через другие фигуры.)

### Решение

Можно воспользоваться «полосатой» раскраской, как в задаче № 4. Или придумать свою расстановку (например, как на рисунке справа).



### Замечание

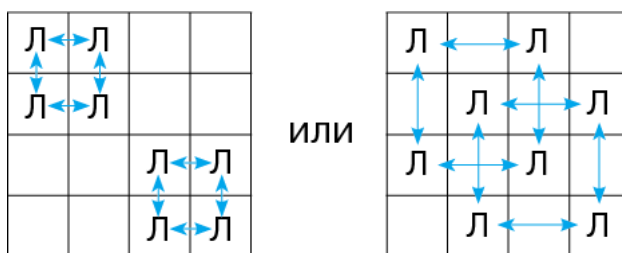
Возможны и другие решения.

### 5т\*. Немирные ладьи

Расставь 8 ладей на доске  $4 \times 4$  так, чтобы каждая ладья была ровно две другие ладьи. Попробуй найти несколько вариантов расстановки. (Ладья бьет всю вертикаль и всю горизонталь, на которой стоит, но не может бить через другие фигуры.)

### Решение

Можно воспользоваться «крупной шахматной» или обычной «шахматной» расстановкой:



### Замечание

Возможны и другие решения.

### Дополнительные задания

#### 6. Девять цветов

Раскрась клетки таблицы  $4 \times 3$  в девять цветов так, чтобы в любом клетчатом квадрате  $2 \times 2$ , который можно увидеть в этой таблице, были хотя бы 2 клетки одного цвета.

#### Подсказка

Всего в этой таблице можно увидеть 6 квадратов  $2 \times 2$ . Начни раскраску с тех клеток, которые лежат в наибольшем числе квадратов.

#### Решение

Вариант раскраски — на рисунке. Одинаковыми цифрами обозначены клетки одинакового цвета.

2	3	4	5
1	1	1	1
6	7	8	9

#### Путь к решению

Заметим, что всего в таблице 12 клеток, а цветов — 9. Это значит, что только для некоторых цветов в таблице будут хотя бы 2 клетки такого цвета, а в некоторые цвета будет раскрашена ровно 1 клетка.

Начнем расстановку с «узкого места». Заметим, что отмеченные на рисунке клетки, находятся сразу в четырех квадратах:

	•	•	

Раскрасим их одним цветом. Будем для удобства обозначать цвета цифрами от 1 до 9.

	1	1	

В двух «центральных» квадратах уже есть клетки одного цвета. Осталось еще 4 боковых квадрата. Клетки второй строки при этом лежат сразу в двух квадратах, поэтому раскрасим их тоже в цвет 1. Оставшиеся 8 клеток раскрашиваем цветами со 2 по 9.

## Сценарий занятия

### Метапредметные цели

- П** Тренировать умение использовать метод ролей при решении математических задач.
- Р** Закрепить умение соотносить полученный результат с требованием задачи.

### Материалы и оборудование

- На класс:**
- презентация;
  - эталоны «Правила работы в паре» и «Правила работы в группе»<sup>2</sup>, «Учимся задавать вопросы»<sup>3</sup>, «Я — актер, я — зритель»<sup>4</sup>.
- У ученика:**
- учебное пособие на печатной основе «Математический театр 3 класс»<sup>5</sup>;
  - черновик, тетрадь;
  - планшетка с клетками или заготовка таблицы  $5 \times 5$ ;
  - заготовки фигур для этапов «Творческая мастерская» и «Сцена».

### Методическая справка

В рамках данного занятия учащиеся продолжают тренироваться в исполнении всех ролей. Так как в большинстве задач требуется придумать некоторый пример (раскраски досок, расстановки символов или фигур), особое внимание в рамках занятия уделяется ролям **фотографа**, **разведчика** и **эксперта**.

Задачи *фотографа* достаточно стандартны (ему нужно четко зафиксировать все требования к выстраиваемому примеру), а *разведчик* использует уже знакомые инструменты, такие как предварительный анализ и принцип «узких мест». От *эксперта* в предлагаемых задачах геометрического содержания ожидается не только проверка примера на соответствие всем условиям, но и открытие новых способов упрощения этой проверки (например, **раскраска** одним цветом клеток, обозначенных одинаковыми символами). Этот способ визуализации проверки также позволяет продемонстрировать отличие «регулярных» и «нерегулярных» (случайных) конструкций, и зафиксировать найденные шаблоны для их построения (шахматная, диагональная, крупная шахматная раскраска).

В «Математическом фойе» необычный инструмент предлагается и для учащихся в роли *переводчика*. Он фактически переформулирует задачу для того, чтобы получить более наглядную и удобную в практическом смысле модель.

### Ход занятия

1	2	3	4	5	6
Математическое фойе	Творческая мастерская	Сцена	Антракт	Выход на бис	Зеркало
25 мин	10 мин	25 мин	5 мин	10 мин	5 мин

<sup>2</sup> Мир деятельности. Методические рекомендации к надпредметному курсу. 1 класс / Под ред. Л.Г. Петерсон. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2018. С. 73–81, 116–124.

<sup>3</sup> Данное пособие, 4\_Игра 1 «Мастера математики».

<sup>4</sup> Данное пособие, 3\_Занятие 3 «Круглые задачи».

<sup>5</sup> Петерсон Л.Г. Математический театр: учебное пособие по олимпиадной математике для 3 класса / Л.Г. Петерсон, О.Н. Агаханова. — М.: Институт СДП, 2021.





## 1. Математическое фойе (25 мин)

– Ребята, посмотрите на этот квадрат. Как называется эта головоломка? (Судоку.)

	8				2		
				8	4		9
		6	3	2			1
	9	7					8
8			9		3		2
	1					9	5
	7			4	5	8	
	3		7	1			
		8					4

С-3

С-4

– Кто из вас когда-нибудь разгадывал «судоку»? (Ответы детей.)

– Какие правила заполнения квадрата в этой головоломке? (Нужно заполнить свободные клетки цифрами от 1 до 9 так, чтобы в каждом столбце, каждой строке и каждом маленьком квадрате все цифры были разными.)

– Предположите, из какого языка к нам пришло название этой игры? (Из японского.)

– Правильно! В переводе с японского «су» — это цифра, а «доку» можно перевести как «стоящая отдельно». Одно из правил судоку гласит: в каждой строке и в каждом столбце таблицы цифры не повторяются. Хотите попробовать придумать такую таблицу сами? (Ответы детей.)

### Задача-ключ

С-5

Заполните клетки таблицы  $5 \times 5$  цифрами от 1 до 5 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце цифры не повторялись.

▲ Школьники в течение 2–3 минут самостоятельно выполняют это задание и показывают ответ на планшете.

С-6

– Я вижу, что у многих из вас получилось заполнить таблицу. Попробуйте сейчас проверить, правильные ли примеры расстановки у вас получились. Для этого сначала сыграйте роль фотографа и выделите условия и требования задачи.

С-7

▲ Учащиеся исполняют роль **фотографа** самостоятельно, выступают по желанию. Учитель при необходимости задает подводящие вопросы. Варианты исполнения роли приведены на с. 15–16 сценария.

С-8

– Итак, что нужно проверить, чтобы убедиться, что цифры расставлены правильно? (Проверить, что в каждой строке и в каждом столбце цифры не повторяются.)

С-9

– А сейчас вопрос для настоящих **экспертов**: как можно сделать расстановку более наглядной? (Закрасить клетки с одинаковыми цифрами одинаковым цветом.)

– Закрасьте своими цветами клетки с одинаковыми цифрами и проверьте расстановку.

С-10

▲ Школьники в течение 1 минуты проверяют свое решение и демонстрируют закрашенные квадраты на листах с заготовкой таблицы  $5 \times 5$  или на планшетах. Учитель обращает внимание учащихся, у которых получилась неверная расстановка, и предлагает им найти свою ошибку и ошибки решений на слайде.

С-11

– Мы видим, что не у всех получилось верно заполнить таблицу.<sup>6</sup> Для того, чтобы найти пример заполнения и больше узнать о построении подобных примеров, разберем задачу по ролям. Как вам кажется, какая роль самая важная при решении задач на конструирование и почему? (Например: роль **разведчика**, потому что он помогает определить «с чего начать».)

С-12

▲ Учащиеся разыгрывают роль **разведчиков** в парах, а затем озвучивают свои идеи, дополняя предыдущего выступавшего. Учитель, при необходимости, с помощью подводящих вопросов

<sup>6</sup> Если все учащиеся успешно справились с ключевой задачей, то можно для повышения мотивации к дальнейшей деятельности сразу предложить им задачу, которая идет дальше в тексте: расставить числа от 1 до 10 в клетки таблицы  $10 \times 10$  так, чтобы числа в каждой строке и каждом столбце не повторялись. В таком случае учащиеся, которые подобрали «нерегулярный» (случайный) пример, скорее всего, испытают затруднение.

C-13

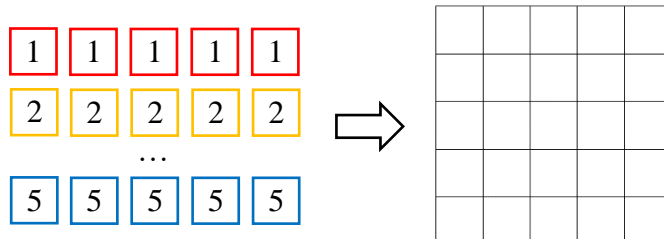
помогает учащимся прийти к выводу о том, что в таблицу нужно расставить по пять цифр от 1 до 5.

C-14

– Вы получили от **разведчика** много ценной информации, которая поможет **переводчику** составить модель для данной задачи. Но вы можете сказать — зачем составлять новую модель, если она уже есть по условию! Какая это модель? (Таблица.)

C-15

– Действительно, вы уже использовали модель-таблицу при решении задач. Но сама по себе таблица, данная в условии, не поможет продвинуться в решении задачи. В некоторых случаях **переводчику** нужно дополнить модель, данную в условии, то есть посмотреть на задачу немного с другой стороны. Уже зная информацию от разведчика, догадитесь: что можно расставлять в таблице? (Например: карточки с цифрами от 1 до 5, по 5 карточек с каждой цифрой.)



C-16

– С этим новым взглядом на задачу вернемся ненадолго к роли **разведчика**. Догадитесь, как можно выкладывать карточки с одинаковой цифрой (например, с единицей), чтобы они не оказались в одной строке или столбце? (По диагонали.)

C-17

– Правильно. При этом цифра от строчки к строчке как бы «сдвигается» на одну клетку вправо (или влево). Теперь обратимся к роли **навигатора**. Составьте план решения задачи, расположив карточки в правильном порядке.

C-18

Последовательно заполнить оставшиеся строки таблицы, соблюдая все условия задачи.

Для каждой из цифр от 1 до 5 выбрать ее возможное положение во второй строке.

Заполнить первую строку таблицы любым способом.

C-19

– Догадитесь, как можно выбирать положение цифр во второй строке, если цифры уже расставлены в первой строке. (Можно во второй строке ставить цифры на 1 клетку правее, чем в первой.)

C-20

– Покажите свои умения в роли **мастера** и заполните таблицу.

C-21

▲ Учитель демонстрирует на слайде один из способов расстановки, соответствующий «диагональной» раскраске:

C-22

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

1	2	3	4	5
5	1	2	3	4
4	5	1	2	3
3	4	5	1	2
2	3	4	5	1

С-23

– Расскажите, как расставлены цифры в этом способе? (По диагонали — одинаковые цифры.)

– Правильно. Такой узор называют «диагональной» раскраской. Сравните этот способ с тем способом расстановки, который получился у вас. Как вы думаете, какой из них удобнее и почему? (Например: «диагональная» раскраска, потому что ее легко продолжить.)

С-24

– Можно ли использовать «диагональную» раскраску для заполнения клеток таблицы  $10 \times 10$  числами от 1 до 10 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце цифры не повторялись? (Ответы детей.)

С-25

– Верно, «диагональную» раскраску можно использовать для заполнения досок любого размера. А теперь рассмотрим другую задачу про таблицу с 5 строками и 5 столбцами.

С-26

*На доске  $5 \times 5$  нужно закрасить несколько клеток так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было ровно по 3 закрашенные клетки.*

Придумайте свой вариант за 2 минуты, работая в паре. При работе обратите внимание на роль **эксперта** и постарайтесь придумать удобный способ проверки правильности раскраски.

▲ Дети на планшетах с клетками рисуют квадраты  $5 \times 5$  и решают задачу. Через 2 минуты учитель просит поднять планшеты и приглашает к доске учеников с различными вариантами раскраски. Остальные ученики проверяют предложенные одноклассниками способы раскраски на соблюдение всех условий задачи.

С-27

– Я вижу, что есть правильные решения, но есть квадраты, на которых закрашенные клетки не соответствуют условиям задачи. Давайте вместе разберемся. Вспомним принцип «узких мест». Откуда удобно начинать раскрашивать и почему? (С угла/с первой строки, потому что у угловой клетки меньше всего соседних.)

– Хорошо, давайте начнем с первой строки, как и в прошлой задаче. Какие клетки закрасим? (Закрашиваем три клетки в верхней строке, начиная с угла.)

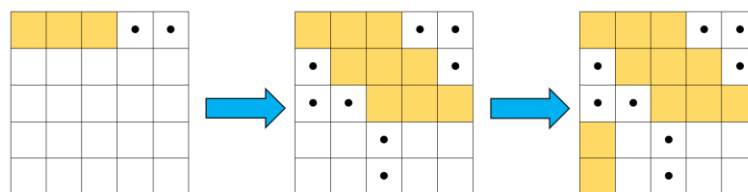
С-28

– Какие клетки будем закрашивать во второй строке, те же самые? (Нет, в каждом столбце должно быть по 3 закрашенные клетки, а в двух последних столбцах пока нет закрашенных клеток.)

– Давайте попробуем закрашивать «диагонально», как в прошлый раз, чтобы получилась «лесенка». Вспомните занятие о математических играх и ответьте, как удобно показать клетки, которые точно не будут закрашены? (Точками.)

С-29

– Хорошо. Итак, получилась «лесенка» из трех ступенек. Поищем «узкое место»: про какой столбец вы теперь точно знаете, какие клетки должны быть в нем закрашены? (Про первый.)

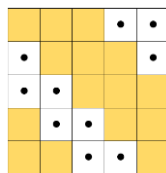


С-30

– Молодцы! Попробуйте теперь самостоятельно заполнить оставшиеся клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце было ровно по 3 закрашенные клетки, используя «диагональную» раскраску.

С-31

▲ Школьники в течение 1 минуты заполняют оставшиеся клетки таблицы. Учитель демонстрирует вариант с «диагональной» раскраской:



С-32

– Предложите общее название задачам, которые вы сейчас решали. (Например: «Раскраски», «Красим по диагонали».)

С-33

– В пособии сегодняшнее занятие названо «Раскраски досок». Откройте пособие на с. 82 и заполните пропуски в советах для таких задач.

### Советы по раскраске досок

1. Удобно начать раскрашивать с «\_\_\_\_\_» — элемента, у которого \_\_\_\_\_ связей с другими (то есть общих границ, или столбцов, или строк).
2. Чтобы заполнить таблицу цифрами (или раскрасить в несколько цветов) так, чтобы цифры (цвета) в строках и столбцах не повторялись, можно ставить одинаковые цифры (цвета) \_\_\_\_\_.

С-34

▲ Школьники заполняют пропуски и согласовывают вставки, а затем проверяют себя по образцу на слайде:

### Советы по раскраске досок

1. Удобно начать раскрашивать с «**узкого места**» — элемента, у которого **мало** связей с другими (то есть общих границ, или столбцов, или строк).
2. Чтобы заполнить таблицу цифрами (или раскрасить в несколько цветов) так, чтобы цифры (цвета) в строках и столбцах не повторялись, можно ставить одинаковые цифры (цвета) **по диагонали**.

С-35

– Какую цель вы поставите на сегодняшнее занятие? (Например: придумать новые узоры и раскраски для других досок.)

С-36



## 2. Творческая мастерская (10 мин)

Работая в группах, ученики пробуют самостоятельно выполнить свое задание. После того, как группа решила свою задачу, учитель предлагает ее участникам придумать «наглядный» способ проверки.

С-37

– Сегодня на занятии представлять получившиеся решения будут двое: ученик в роли **разведчика**, который предложит идеи для решения и поможет **навигатору**, **мастера**, который продемонстрирует получившийся пример, и ученик в роли **эксперта**, целью которого будет наглядно объяснить, почему полученный рисунок соответствует всем условиям задачи. Обратите внимание, что способ получения примера не является частью решения, однако **мастеру** будет полезно рассказать, как он рассуждал, чтобы получить этот пример.

С-38



## 3. Сцена (25 мин)

Для упрощения деятельности на данном этапе перед началом выступлений детей демонстрационный материал в виде фигур, которые требуется раскрасить,

размещается на доске. Это могут быть как распечатанные на бумаге крупные фигуры, так и заранее изображенные учителем на доске заготовки.

При отсутствии возможности изображать раскраску цветами у доски, нужно предложить выступающему каким-то образом «закодировать» цвета — например, цифрами или первыми буквами («1 — красный, 2 — синий, 3 — зеленый», или «К — красный, С — синий, З — зеленый»). Зрители же могут перенести решение в рабочие тетради уже с использованием указанных цветов.

C-39-41

### 1. Витраж (2 мин)

Витраж состоит из одинаковых по размеру и форме треугольных кусочков стекла (см. рисунок). Раскрась его как можно меньшим количеством цветов так, чтобы треугольники с общей стороной были разного цвета.

C-45-47

### 2. Фигуры (3 мин)

C-42-44

Перед тобой 16 фигур. Раскрась их, используя 4 цвета, и расставь в таблице  $4 \times 4$  так, чтобы в каждом столбце и каждой строке не повторялись ни цвета, ни формы. (Фигуры одной формы могут быть одного цвета.)

### 3. Пчелиная история (4 мин)

Королева пчел повелела раскрасить соты в улье так, чтобы соты с общей стенкой всегда были разного цвета. Попробуй раскрасить эти соты, используя как можно меньше разных цветов.

### 4. Диагонали (5 мин)

C-48-50

Раскрась каждую клетку доски  $5 \times 5$  в желтый или синий цвет так, чтобы соседние по диагонали клетки были разного цвета, а клетки через одну по диагонали — одинакового цвета.

C-51-54

### 5\*. Крестики-нолики (5 мин)

Расставь 20 крестиков на доске  $6 \times 6$  так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не стояли 3 крестика подряд, и при этом в первой, второй, пятой и шестой строках было по 4 крестика, а в третьей и четвертой — по 2 крестика.

C-55



### 4. Антракт (5 мин)

– Вспомните, о чем были задачи, которые вы сегодня решали. (О раскраске досок/фигур/таблиц.)

– Какие новые советы вы себе хотите дать? (Ответы детей.)

– В Математическом фойе вы дали себе совет о том, что иногда бывает удобно начинать раскраску с такого «узкого места»: той клетки, для которой меньше всего связей (соседей). Во всех ли задачах, которые вы решали, подходит этот совет? (Ответы детей.)

C-56

▲ Если школьники затрудняются с ответом на данный вопрос, учитель обращает их внимание на задачу №3 («Пчелиная история») и тот факт, что при раскраске тут удобно начинать, наоборот, с ячейки, у которой больше всего соседей.

– Итак, теперь мы можем и по-другому заполнить первый совет из Математического фойе:

#### Советы по раскраске досок

1. Удобно начать раскрашивать с «**узкого места**» — элемента, у которого \_\_\_\_\_ связей с другими (то есть общих границ, или столбцов, или строк).

Школьники дополняют пропуск и проверяют свои записи по образцу на экране:

### Советы по раскраске досок

1. Удобно начать раскрашивать с «узкого места» — элемента, у которого **мало или много (больше или меньше всего)** связей с другими (то есть общих границ, или столбцов, или строк).

— Итак, вы видите, что «узким местом» может быть не только угловая клетка, у которой меньше всего соседей, но и «центральная» с наибольшим числом соседей. Это происходит потому, что «узкое место» в задаче — это то место, для которого меньше всего вариантов (в лучшем случае — только один вариант). Ведь рассматривая в задаче № 3 ячейку с наибольшим числом соседей, мы не только сразу определяем, как должны быть раскрашены 6 ее соседей, но и делаем вывод, что нужно использовать не менее 3 цветов для раскраски (потому что эту ячейку и ее соседей нельзя раскрасить меньшим числом цветов).



### 5. Выход на бис (10 мин)

Учащиеся самостоятельно решают тренировочные задачи на с. 84–85 на выбор. После этого они проводят самопроверку решений.

Нужно обратить внимание детей, что поскольку в задачах могут быть разные варианты примеров, решения нужно проверять на соответствие всем условиям задачи. При самопроверке также можно пользоваться вариантами, предложенными на с. 141 пособия.

▲ После самопроверки учитель может задать учащимся вопросы об исполнении ими ролей.

— Кто решил задачу и проверил ее как настоящий **эксперт**?

— Важно не только правильно решить задачу, но и суметь найти ошибку в своем решении. Есть ли те, кто смог, выступая в роли **эксперта**, найти и исправить ошибку в примере? Сегодня вы награждаетесь значками экспертов.

▲ В завершении учитель объявляет об игре «Математическая абака» на следующем занятии и дает задание познакомиться с ее правилами дома.



### 6. Зеркало (5 мин)

Учитель организует рефлексию работы учащихся на занятии. Результаты рефлексии ученики фиксируют в пособии.

— Какую цель вы сегодня ставили на занятии? Достигли ли вы этой цели?

— Какие роли вам помогли лучше понять решение задач? Кто хочет рассказать об этом?

— Какой совет себе самому вы хотите дать? Запишите в разделе «Выводы».

— С каким настроением вы сегодня решали задачи? Нарисуйте свое отражение в зеркале.

## Для педагогов, работающих в ТДМ

### Основные структурные элементы занятия





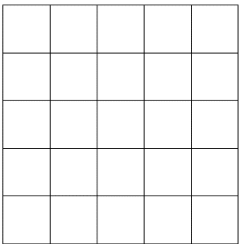

1. **Новое знание.** Принцип «диагональной раскраски»<sup>7</sup> клетчатой доски (таблицы).
2. **Пробное действие.** Попробуйте заполнить клетки таблицы  $5 \times 5$  цифрами от 1 до 5 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце цифры не повторялись.
3. **Возможные затруднения.** «Я не смог заполнить таблицу по указанному правилу.»



<sup>7</sup> Под «диагональной раскраской в  $n$  цветов» часто понимается расстановка цифр от 1 до  $n$  диагональным образом (каждому цвету соответствует своя цифра). Частным случаем диагональной раскраски при  $n = 2$  является обычная шахматная раскраска.



4. **Фиксация причины затруднения.** «Я не знаю удобный способ заполнения таблицы, чтобы в строках и столбцах цифры не повторялись.»
5. **Цель деятельности.** «Узнать удобный способ заполнения таблицы.»
6. **Фиксация нового знания.** Чтобы заполнить таблицу цифрами так, чтобы цифры в строках и столбцах не повторялись, можно ставить одинаковые цифры по диагонали.

## Разбор ключевой задачи с помощью метода ролей

<b>Задача.</b> Заполните клетки таблицы $5 \times 5$ цифрами от 1 до 5 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце цифры не повторялись.		
<b>Роль</b>	<b>Ключи</b>	<b>Исполнение роли учителем и учениками</b>
<b>ФОТОГРАФ</b> 	КАРТИНКА	У меня есть квадратные плиточки с написанными на них цифрами. Я раскладываю эти плиточки в виде квадрата так, чтобы получилась интересная закономерность в расположении цифр друг относительно друга.
	УСЛОВИЕ, ВОПРОС (ТРЕБОВАНИЕ)	<b>Условие:</b> 1) таблица с 5 строками и 5 столбцами; 2) в каждую клетку таблицы можно написать любую цифру от 1 до 5; 3) цифры в каждой строке и в каждом столбце не должны повторяться. <b>Требование:</b> Заполнить таблицу цифрами по этим условиям.
<b>РАЗВЕДЧИК</b> 	ВЗАИМОСВЯЗИ	1) В таблице 5 строк и 5 столбцов, значит всего $5 \cdot 5 = 25$ клеток, которые нужно заполнить цифрами. 2) Всего 5 возможных цифр (от 1 до 5) и по 5 клеток в каждой строке и в каждом столбце. Цифры в строках и в столбцах не должны повторяться. Значит, в каждой строке и в каждом столбце должны оказаться все цифры от 1 до 5 по одному разу.
	ИДЕИ, ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ	Так как в каждой строке и в каждом столбце должны оказаться все цифры от 1 до 5, то можно начать заполнение с одной целой строки (например, первой).
<b>ПЕРЕВОДЧИК</b> 	МОДЕЛЬ (известная или своя)	В качестве модели можно использовать по 5 карточек с каждой цифрой от 1 до 5, которые нужно выложить в виде квадрата $5 \times 5$ . <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="text-align: center;"> <div style="border: 1px solid red; padding: 2px 5px;">1</div> <div style="border: 1px solid red; padding: 2px 5px;">1</div> <div style="border: 1px solid red; padding: 2px 5px;">1</div> <div style="border: 1px solid red; padding: 2px 5px;">1</div> <div style="border: 1px solid red; padding: 2px 5px;">1</div> </div> <div style="margin: 0 10px;"> <div style="border: 1px solid yellow; padding: 2px 5px;">2</div> <div style="border: 1px solid yellow; padding: 2px 5px;">2</div> <div style="border: 1px solid yellow; padding: 2px 5px;">2</div> <div style="border: 1px solid yellow; padding: 2px 5px;">2</div> <div style="border: 1px solid yellow; padding: 2px 5px;">2</div> </div> <div style="margin: 0 10px;">...</div> <div style="text-align: center;"> <div style="border: 1px solid blue; padding: 2px 5px;">5</div> <div style="border: 1px solid blue; padding: 2px 5px;">5</div> <div style="border: 1px solid blue; padding: 2px 5px;">5</div> <div style="border: 1px solid blue; padding: 2px 5px;">5</div> <div style="border: 1px solid blue; padding: 2px 5px;">5</div> </div> <div style="margin-left: 20px;">  </div> <div style="margin-left: 20px;">  </div> </div>
<b>НАВИГАТОР</b> 	ПРАВИЛА, СВОЙСТВА, ПОДХОД	1) Можно заполнять таблицу последовательно, например, двигаясь по строкам сверху вниз. 2) Чтобы цифра из предыдущей строки не оказалась в том же столбце в следующей строке, в новой строке ее нужно «сдвинуть» (например, на 1 вправо).
	ПЛАН РЕШЕНИЯ	1. Заполнить первую строку таблицы любым способом. 2. Для каждой из цифр от 1 до 5 выбрать ее возможное положение во второй строке. 3. Последовательно заполнить все строки таблицы, соблюдая все условия задачи.

<div>МАСТЕР</div> <div></div>	<div>РЕШЕНИЕ, ОФОРМЛЕНИЕ</div>	<div>1) Расставим цифры от 1 до 5 в первой строке (см. рис. 1).</div> <div>2) При заполнении второй строки сдвинем все цифры на 1 место правее (см. рис. 2).</div> <div>3) Оставшуюся клетку во второй строке заполним оставшейся цифрой — 5 (см. рис. 3).</div> <div><div><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table><div>рис. 1</div></div><div><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table><div>рис. 2</div></div><div><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table><div>рис. 3</div></div></div> <div>4) Начнем заполнять третью строку, сдвигая цифры из предыдущей строки на 1 место правее (см. рис. 4).</div> <div>5) Заполним оставшуюся клетку единственной еще не использованной цифрой.</div> <div>6) Продолжим заполнять таблицу до последней строки.</div> <div><div>Ответ:</div><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>1</td></tr></table></div> <div><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td></td><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table><div>рис. 4</div></div>	1	2	3	4	5																					1	2	3	4	5		1	2	3	4																1	2	3	4	5	5	1	2	3	4																1	2	3	4	5	5	1	2	3	4	4	5	1	2	3	3	4	5	1	2	2	3	4	5	1	1	2	3	4	5	5	1	2	3	4		5	1	2	3										
1	2	3	4	5																																																																																																																											
1	2	3	4	5																																																																																																																											
	1	2	3	4																																																																																																																											
1	2	3	4	5																																																																																																																											
5	1	2	3	4																																																																																																																											
1	2	3	4	5																																																																																																																											
5	1	2	3	4																																																																																																																											
4	5	1	2	3																																																																																																																											
3	4	5	1	2																																																																																																																											
2	3	4	5	1																																																																																																																											
1	2	3	4	5																																																																																																																											
5	1	2	3	4																																																																																																																											
	5	1	2	3																																																																																																																											
<div>ЭКСПЕРТ</div> <div></div>	<div>ПРОВЕРКА РЕШЕНИЯ И ОТВЕТ</div>	<div>Проверим, что цифры не повторяются в каждой строке и в каждом столбце таблицы. Для наглядности раскрасим клетки с одинаковыми цифрами в свои цвета.</div> <div><div>Вывод: пример верный.</div><div><table><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>5</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>1</td></tr></table></div></div>	1	2	3	4	5	5	1	2	3	4	4	5	1	2	3	3	4	5	1	2	2	3	4	5	1																																																																																																				
1	2	3	4	5																																																																																																																											
5	1	2	3	4																																																																																																																											
4	5	1	2	3																																																																																																																											
3	4	5	1	2																																																																																																																											
2	3	4	5	1																																																																																																																											
	<div>ВЫВОДЫ</div>	<div><b>Возможные вопросы</b></div> <div><div>– Обратите внимание на положение единиц в получившейся расстановке. Что вы замечаете? (Они идут по диагонали.)</div><div>– Что вы можете сказать о двойках, тройках? (Они тоже идут по диагонали, но таких диагоналей несколько.)</div><div>– Как бы вы назвали получившуюся раскраску? (Например, диагональная раскраска.)</div><div>– Какие выводы вы сделали при решении задачи-ключ?</div></div> <div><div>(1. Задачи о расстановке цифр в таблице можно решать по шагам, например, последовательно заполняя строки.</div><div>2. Чтобы добиться того, чтобы цифры в строках и столбцах не повторялись, можно расставлять их по диагонали.)</div><div>– Внимательное проигрывание каких ролей помогло вам решить задачу? (...)</div></div>																																																																																																																													