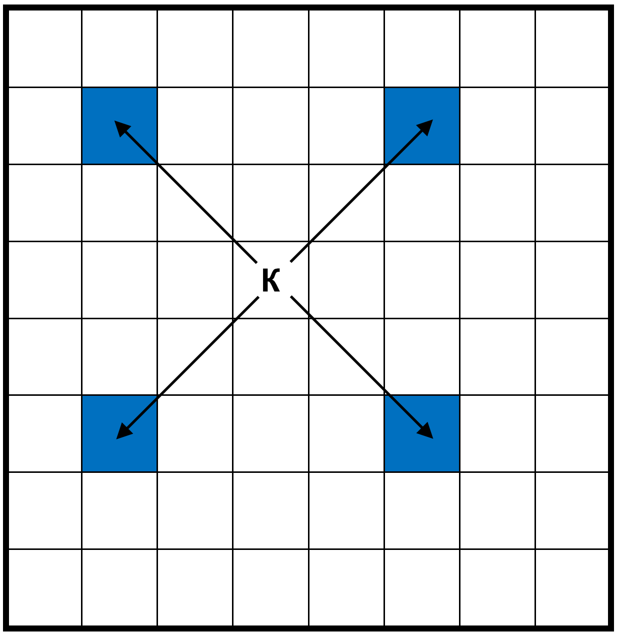
Международный флешмоб по математике
«Задача дня»

7+ класс

ПУТЕШЕСТВИЕ СЛОНОВОГО КУЗНЕЧИКА

Новая шахматная фигура *слоновый кузнечик* умеет за ход прыгать по диагонали в любую сторону через одну клетку. Какое наибольшее число слоновых кузнечиков можно расставить на доске 8 × 8 так, чтобы никакие двое не били друг друга? (Кузнечик бьет те клетки, на которые может попасть за один ход. Ставить двух кузнечиков в одну клетку нельзя).

1. Приведи пример подходящей расстановки наибольшего количества слоновых кузнечиков.
2. Докажи, что большее количество слоновых кузнечиков с соблюдением всех условий задачи расставить нельзя.



РАЗБОР ЗАДАНИЯ

1. Выделим элементарные условия и требования задачи.

<u>Элементарные условия задачи.</u>

1) Дана клетчатая доска размерами 8 × 8.
2) Даны фигуры, которые называются «слоновый кузнечик». Такая фигура делает ход через одну клетку по диагонали, и бьет все клетки, до которых может добраться за один ход. Фигур неограниченное количество.
3) В некоторые клетки этой доски можно поставить по 1 слоновому кузнечику.
4) Никакие поставленные фигуры не должны бить друг друга.
5) Общее количество фигур должно быть как можно бóльшим.

Требования задачи.

1) Придумать подходящий вариант расстановки, в котором используется как можно больше фигур.
2) Доказать, что большее число фигур с соблюдением условий расставить нельзя.

2. Проведем анализ условия задачи.

Заметим, что слоновый кузнечик может бить максимум 4 другие фигуры (как показано на рисунке в условии). Если же кузнечик стоит «ближе» к стороне доски, то количество клеток, находящихся под его боем, может быть меньше (например, фигура, стоящая в углу доски, бьет только одну клетку).

3. Приведем **пример** расстановки 32 фигур — решение пункта 1.

Внимание! Ученики не должны объяснять в решении, как они получили подходящий пример, но желательно, чтобы они умели пояснять, почему этот пример подходит. Мы приведем **один возможный пример** и пояснение, почему он подходит. Существуют и другие примеры. Отдельно мы их не приводим, но каждый из них можно проверить по **алгоритму самопроверки**, приведенному в отдельном файле.

Приведем один возможный пример, как можно расставить 32 слоновых кузнечика так, чтобы они не били друг друга:

К	К	К	К	К	К	К	К
К	К	К	К	К	К	К	К
К	К	К	К	К	К	К	К
К	К	К	К	К	К	К	К

Поясним, почему пример подходит. Слоновый кузнечик за ход прыгает через одну клетку по диагонали, то есть сдвигается на 2 клетки по горизонтали и на 2 клетки по вертикали. Это значит, что кузнечики с 1-й сверху горизонтали бьют только клетки 3-й горизонтали (а она пустая), со 2-й горизонтали — только клетки пустой 4-й, с 7-й горизонтали — пустой 5-й, а с 8-й горизонтали — пустой 6-й. Значит, никакие две фигуры не бьют друг друга.

3. Приведем оценку (доказательство того, что больше 32 кузнечиков расставить не получится) — решение пункта 2.

Приведем два возможных способа доказательства.

1-й способ доказательства

Докажем методом *от противного.* Пусть можно расставить на шахматную доску больше 32 слоновых кузнечиков так, чтобы никакие два не били друг друга.

Разделим доску на четыре квадрата 4×4 как показано на рисунке справа.

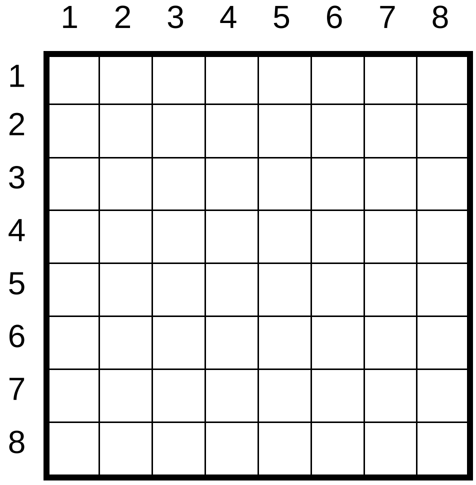
1	5	3	7				
2	6	4	8				
3	7	1	5				
4	8	2	6				

Если в каждом таком квадрате не более 8 кузнечиков, то всего их не более 4 · 8 = 32, что противоречит предположению. Значит в каком-то из квадратов есть хотя бы 9 кузнечиков. Пусть для определенности это будет верхний левый квадрат.

Разобьем клетки этого квадрата на пары так, чтобы из одной клетки пары можно было попасть в другую за один ход кузнечика. Заметим, что в каждой такой паре может быть занято не более одной клетки (так как в противном случае там будет два кузнечика, которые бьют друг друга), а значит кузнечиков во всем квадрате 4 × 4 может быть не более 8, что противоречит предыдущему рассуждению.

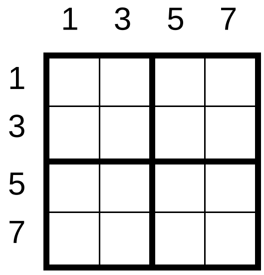
Значит, предположение неверно, и расставить более чем 32 кузнечиков не удастся.

2-й способ доказательства



Пронумеруем строки и столбцы таблицы как показано на рисунке. Столбец (строку) с нечетной (четной) координатой будем называть нечетным (четным) столбцом (строкой) соответственно. Заметим, что кузнечик, стоящий на нечетной строке, бьет только клетки нечетных строк, а стоящий на четной — только клетки четных строк (аналогично со столбцами).

Рассмотрим фигуру, образованную клетками, находящимися на пересечении нечетных клеток и нечетных столбцов. Ее можно представить в виде квадрата 4×4, в котором кузнечик ходит по диагонали на одну клетку.



Разделим получившийся квадрат на квадратики 2×2 как показано на рисунке. Заметим, что если в таком квадратике стоит хотя бы три кузнечика, то один из них бьет другого. Тогда в каждом таком квадратике стоит не более двух кузнечиков, а значит во всем квадрате 4×4 (то есть во всей рассмотренной фигуре) стоит не более 4 · 2 = 8 кузнечиков.

Возможные варианты четности строк и столбцов задают 4 такие непересекающиеся фигуры, а значит всего кузнечиков на доске может быть не более 4 · 8 = 32.

Внимание! Школьники могут привести такое (неверное!) рассуждение для доказательства того, больше кузнечиков расставить нельзя:

«Если пытаться добавить в пример расположения кузнечиков из пункта 2 еще фигуру, то сделать это не получится. Значит, большее число слоновых кузнечиков расставить нельзя».

Данное рассуждение неверно, так как из того, что добавить фигуры конкретно в этот пример нельзя, еще не следует, что нет какого-то другого примера, где фигур больше.

4. Сделаем вывод.

Мы показали, как можно расставить 32 кузнечика так, чтобы они не били друг друга, а также доказали, что больше кузнечиков расставить нельзя. Таким образом, мы обосновали ответ «32 слоновых кузнечика» на вопрос задачи.

5. Проведем самопроверку пункта 1.

Алгоритм самопроверки дан отдельным файлом.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для ознакомления приведем цепочку рассуждений, которая могла привести к решению задачи. Эта логическая цепочка строится на основе анализа взаимосвязей задачи.

Проведем анализ того, как могут стоять фигуры, не бьющие друг друга. Начнем с «узкого места» — угловой клетки. Для определенности возьмем верхнюю левую клетку. Отметим ее и те клетки доски, в которые из нее может дойти кузнечик, возможно, за несколько ходов. Обосновать, что кузнечик, стартовавший в левой угловой клетке, может добраться только до отмеченных клеток, можно, например, с помощью полного перебора вариантов.

1				1			
		1				1	
1				1			
		1				1	

Действуя аналогичным образом, можно разбить всю доску на 8 групп клеток, связанных ходами фигуры:

1	3	2	4	1	3	2	4
5	7	6	8	5	7	6	8
2	4	1	3	2	4	1	3
6	8	5	7	6	8	5	7
1	3	2	4	1	3	2	4
5	7	6	8	5	7	6	8
2	4	1	3	2	4	1	3
6	8	5	7	6	8	5	7

Так как кузнечики, стоящие в клетках одной группы, не могут попасть на клетки другой группы, то они не могут бить кузнечиков других групп. Значит, расстановку кузнечиков можно проводить в разных группах независимо.

Заметим, что расставить четырех кузнечиков в клетки одной группы можно. Например, можно поставить их на горизонтали с номерами, отличающимися больше, чем на 2: 1 и 5, 2 и 6, и т.д. Таким образом получается один из возможных примеров.

Из тех же соображений разбиения клеток на группы возникает и идея оценки: на самом деле, нельзя поставить более четырех кузнечиков на клетки одной группы. Эту гипотезу можно выдвинуть, попробовав расставить 5 или более фигур, не бьющих друг друга, например, на клетки 1-й группы.

Желаем успехов!
Делитесь вашими фотографиями и видеороликами в соцсетях!