ПРОСВЕЩЕНИЕ

НОУ ДПО «ИНСТИТУТ СИСТЕМНО-ДЕЯТЕЛЬНОСТНОЙ ПЕДАГОГИКИ»
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

ФЕСТИВАЛЬ ИМС «УЧУСЬ УЧИТЬСЯ»
МЕЖДУНАРОДНЫЙ ФЛЕШМОБ

Задача дня

«ЗАДАЧА ДНЯ»

15 декабря

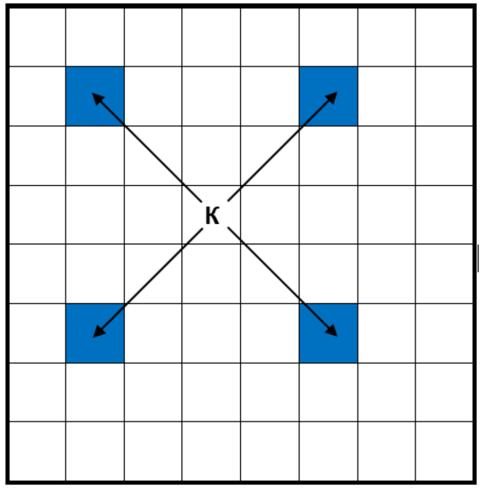
Институт системно-деятельностной педагогики ПЕТЕРСОН

День решения увлекательных
математических задач
для детей и взрослых от 3 лет до 100+!

#ЗадачаПетерсон2021

ПУТЕШЕСТВИЕ СЛОНОВОГО КУЗНЕЧИКА

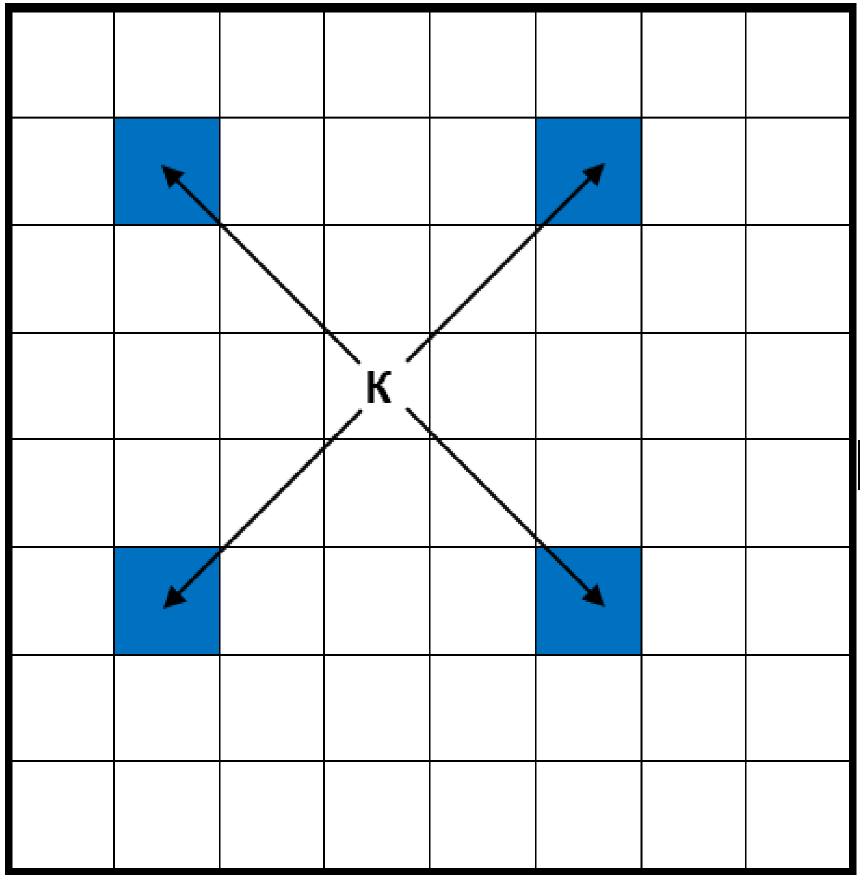
Новая шахматная фигура ***слоновый кузнечик*** умеет за ход прыгать по диагонали в любую сторону через одну клетку. Какое наибольшее число слоновых кузнечиков можно расставить на доске 8 × 8 так, чтобы никакие двое не били друг друга? (Кузнечик бьёт те клетки, на которые может попасть за один ход. Ставить двух кузнечиков в одну клетку нельзя).



1. Приведи **пример** подходящей расстановки наибольшего количества слоновых кузнечиков.
2. Докажи, что большее количество слоновых кузнечиков с соблюдением всех условий задачи расставить **нельзя**.

АНАЛИЗ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ

- Фигура «слоновый кузнечик» бьёт через одну клетку по диагонали.
- В каждую клетку ставится не больше одного слонового кузнечика.
- Никакие поставленные фигуры не должны бить друг друга.
- Общее количество фигур должно быть как можно **бо́льшим**.



Доска 8 × 8

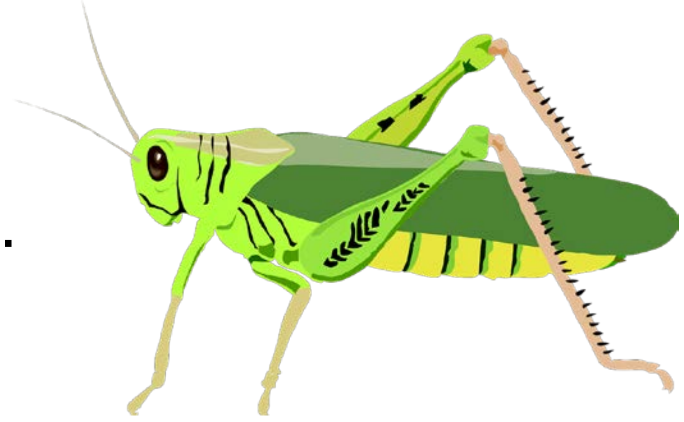
ПЛАН РЕШЕНИЯ

1) Сначала приведём пример расстановки на шахматной доске **32 слоновых кузнечиков**, не бьющих друг друга.

2) Затем приведём верхнюю оценку количества фигур на доске: доказательство того, что «правильно» расставить можно **не более 32 фигур**.

3) В конце сделаем вывод, что верный ответ — **32 фигуры**.

Покажем 2 возможных способа доказательства в пункте 2.



Разбор задания

ПРИМЕР

Один из возможных примеров расстановки на шахматной доске 32 фигур, не бьющих друг друга:

К	К	К	К	К	К	К	К
К	К	К	К	К	К	К	К
К	К	К	К	К	К	К	К
К	К	К	К	К	К	К	К

ПРИМЕР

К	К	К	К	К	К	К	К
К	К	К	К	К	К	К	К
К	К	К	К	К	К	К	К
К	К	К	К	К	К	К	К

Докажем, что пример подходит, то есть никакие два кузнечика не бьют друг друга.

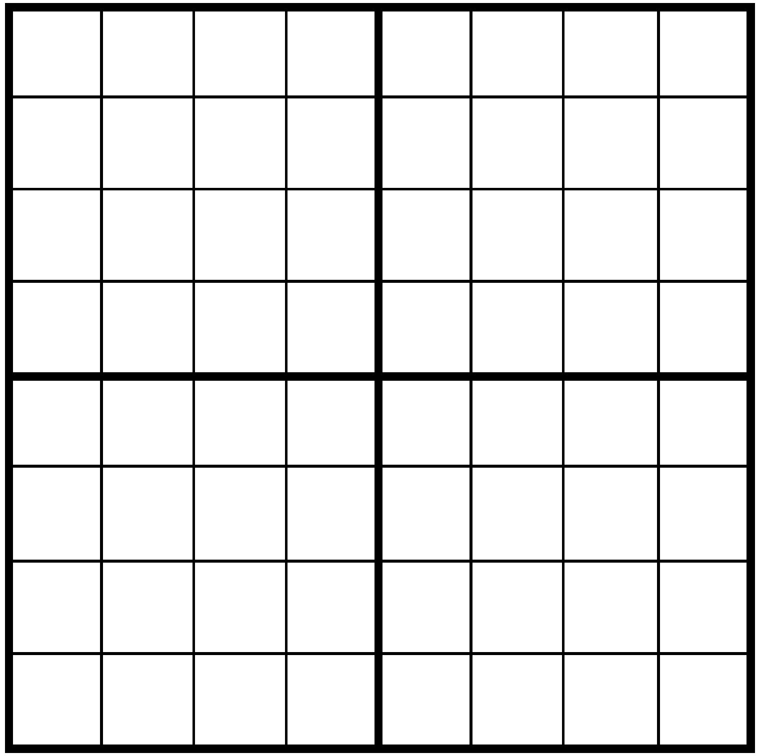
Действительно:

кузнечики прыгают через клетку по диагонали, и могут за ход оказаться только на пустых горизонталях.

ОЦЕНКА. 1-Й СПОСОБ

Воспользуемся методом «от противного». Пусть удалось расставить на доске более 32 фигур, не бьющих друг друга.

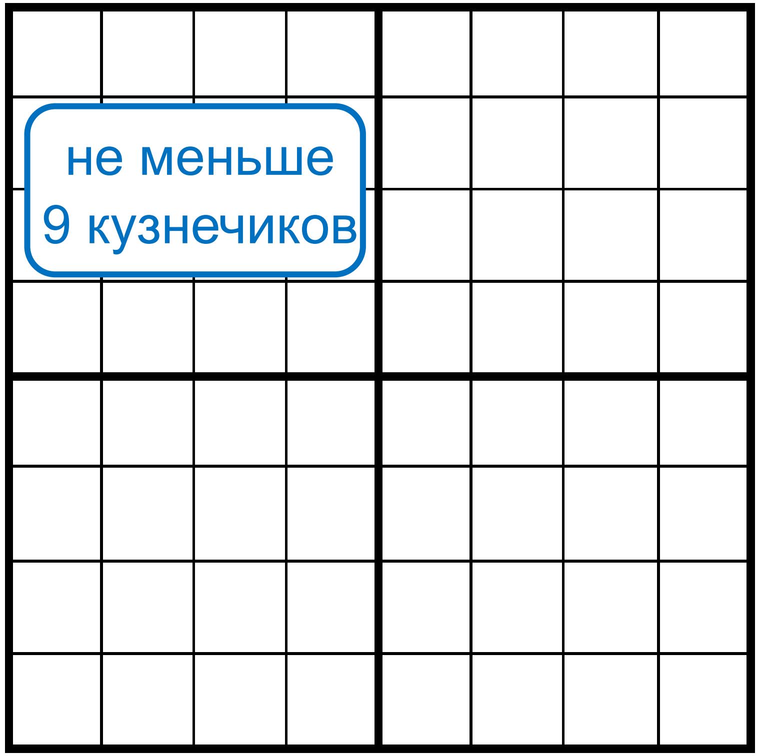
Разделим доску на четыре квадрата 4 × 4:



ОЦЕНКА. 1-Й СПОСОБ

Если в каждом квадрате не более 8 кузнечиков, то всего на доске не больше, чем $4 \cdot 8 = 32$ кузнечика, а по предположению их **больше 32**.

Значит, найдётся квадрат, в котором не менее 9 кузнечиков. Пусть для определённости это верхний левый квадрат.



ОЦЕНКА. 1-Й СПОСОБ

Разобьём клетки выбранного квадрата на пары связанных ходом кузнечика (на рисунке клетки одной пары обозначены одинаковыми цифрами):

1	5	3	7				
2	6	4	8				
3	7	1	5				
4	8	2	6				

ОЦЕНКА. 1-Й СПОСОБ

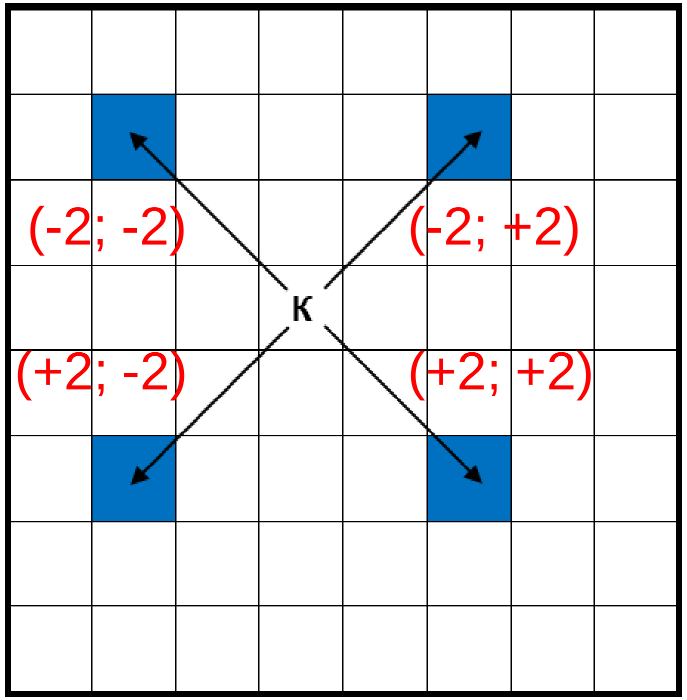
Всего получилось 8 пар. Но мы доказали, что в данном квадрате не менее 9 кузнечиков. Значит, хотя бы на одной паре одинаковых цифр будут стоять оба кузнечика. Они бьют друг друга, а по предположению таких не было.

Противоречие. Предположение неверно, и значит расставить больше, чем 32 фигуры, не бьющих друг друга, не получится.

1	5	3	7				
2	6	4	8				
3	7	1	5				
4	8	2	6				

ОЦЕНКА. 2-Й СПОСОБ

1) Чётность номеров вертикали и горизонтали, на которых оказывается кузнечик при прыжках, не меняется.



	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

ОЦЕНКА. 2-Й СПОСОБ

1) Чётность номеров вертикали и горизонтали, на которых оказывается кузнечик при прыжках, не меняется.

2) Рассмотрим только «нечётные» вертикали и горизонтали и клетки в их пересечении. Получим такой квадрат:

	1	3	5	7
1				
3				
5				
7				

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Разбор задания

ОЦЕНКА. 2-Й СПОСОБ

1) Чётность номеров вертикали и горизонтали, на которых оказывается кузнечик при прыжках, не меняется.
2) Рассмотрим только «нечётные» вертикали и горизонтали и клетки в их пересечении.
3) Разделим полученный квадрат на квадратики 2 × 2. В каждом маленьком квадратике не более 2 фигур, не бьющих друг друга.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

	1	3	5	7
1				
3				
5				
7				

ОЦЕНКА. 2-Й СПОСОБ

1) Чётность номеров вертикали и горизонтали, на которых оказывается кузнечик при прыжках, не меняется.
2) Рассмотрим только «нечётные» вертикали и горизонтали и клетки в их пересечении.
3) Разделим полученный квадрат на квадратики 2×2. В каждом маленьком квадратике не более 2 фигур, не бьющих друг друга.
4) Значит, во всём квадрате из «нечётных» строк и столбцов не более $4 \cdot 2 = 8$ фигур.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

	1	3	5	7
1				
3				
5				
7				

ОЦЕНКА. 2-Й СПОСОБ

Выбрать чётность горизонталей и вертикалей можно 4 способами:

	1	3	5	7
1				
3				
5				
7				

	1	3	5	7
2				
4				
6				
8				

	2	4	6	8
1				
3				
5				
7				

	2	4	6	8
2				
4				
6				
8				

В каждом способе не больше 8 кузнечиков, значит всего кузнечиков на доске 8 × 8 не более, чем $4 \cdot 8 =$ **32.**

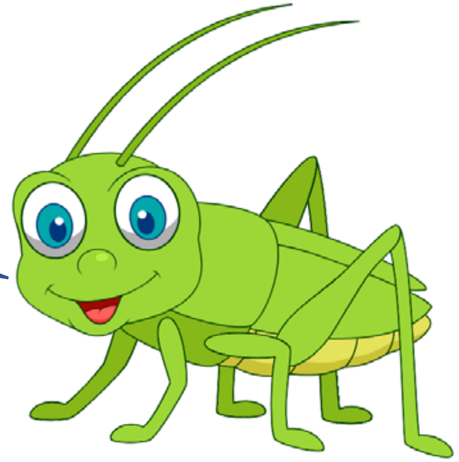
ВЫВОД

Мы показали, что:

- **32** кузнечика поставить можно;
- больше, чем **32** фигуры поставить нельзя.

Значит, верный ответ: **32 слоновых кузнечика**.

А как вы решали задачу?



ПРОСВЕЩЕНИЕ

НОУ ДПО «ИНСТИТУТ СИСТЕМНО-ДЕЯТЕЛЬНОСТНОЙ ПЕДАГОГИКИ»

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

ДО ВСТРЕЧИ

НА ОЛИМПИАДЕ ПЕТЕРСОН

В ФЕВРАЛЕ 2022 ГОДА!