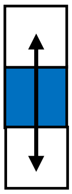
Международный флешмоб по математике
«Задача дня»

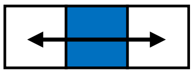
5–6 класс

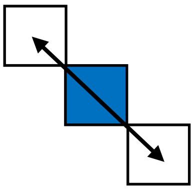
РАСКРАСКА ДОСКИ

Дана клетчатая доска 6 × 8. Раскрась ее клетки как можно меньшим количеством цветов так, чтобы для каждой клетки ее противоположные соседи по стороне были разных цветов, а ее противоположные соседи по диагонали — одного цвета (каждая клетка целиком красится в один из цветов). (Если у клетки для какого-то ее соседа нет противоположного (например, если клетка находится на краю доски), то считается, что для этого соседа условие выполнено.)

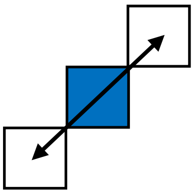


Противоположные соседи по стороне





Противоположные соседи по диагонали



А) Сколько всего цветов понадобилось?
Б) Попробуй доказать, что меньшим числом цветов обойтись нельзя.

РАЗБОР ЗАДАНИЯ

1. Выделим элементарные условия и требования задачи.

<u>Элементарные условия задачи.</u>

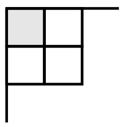
1) Дана клетчатая доска размерами 6×8.
2) Каждую клетку нужно целиком покрасить в некоторый цвет.
3) Противоположные соседи по стороне для каждой клетки должны быть разных цветов, а противоположные соседи по диагонали — одного цвета.
4) Если у клетки для какого-то ее соседа нет противоположного (например, если клетка находится на краю доски), то считается, что для этого соседа условие выполнено.
5) Общее количество цветов должно быть как можно меньшим.

<u>Требования задачи.</u>

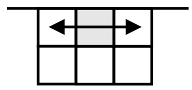
1) Придумать подходящий вариант раскраски, в котором используется как можно меньше цветов.
2) Указать полученное количество цветов.
3) Доказать, что меньшим числом цветов обойтись нельзя.

2. Проведем анализ условий и требований задачи.

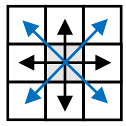
Все клетки доски можно разделить по количеству пар соседей на три типа: ***угловые*** (у них нет противоположных соседей ни по стороне, ни по диагонали), ***неугловые вдоль стороны доски*** (у них есть одна пара противоположных соседей по стороне, но нет противоположных соседей по диагонали) и ***внутренние*** (у них есть две пары противоположных соседей по стороне и две пары противоположных соседей по диагонали):



Тип 1 (угловые)



Тип 2 (неугловые вдоль стороны)



Тип 3 (внутренние)

В правильной раскраске для каждой внутренней клетки должны выполняться условия:

- соседние по стороне клетки справа и слева — разного цвета;
- соседние по стороне клетки сверху и снизу — разного цвета;
- соседние по диагонали клетки сверху-справа и снизу-слева — одного цвета;
- соседние по диагонали клетки сверху-слева и снизу-справа — одного цвета.

Для того, чтобы выполнить требования задачи, нужно показать **пример** раскраски доски в наименьшее возможное количество цветов, а для решения пункта Б) — привести **оценку** (то есть доказательство, что меньшим количеством цветов обойтись не получится).

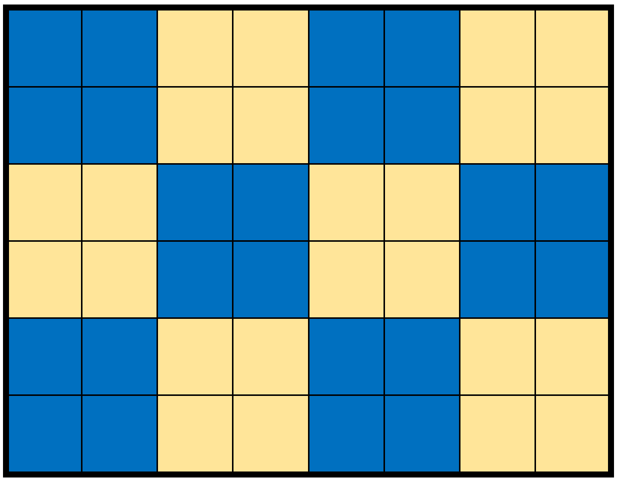
4. Приведем **оценку** (доказательство того, что меньшим 2 количеством цветов обойтись не получится) — решение пункта Б).

Докажем, что раскрасить доску в один цвет с соблюдением всех условий не получится. Пусть все клетки доски раскрашены в один цвет. Тогда у любой внутренней клетки «соседи» справа и слева — одного цвета, а по условию должны быть разного цвета. Значит, раскраска в 1 цвет не подходит.

3. Приведем **пример** подходящей раскраски в 2 цвета.

Внимание! Ученики не должны объяснять в решении, как они получили подходящий пример, но желательно, чтобы они умели пояснять, почему этот пример подходит. Мы приведем один возможный пример. Существуют и другие примеры. Отдельно мы их не изображаем (так как их достаточно много), но каждый из них можно проверить по алгоритму, приведенному в отдельном файле.

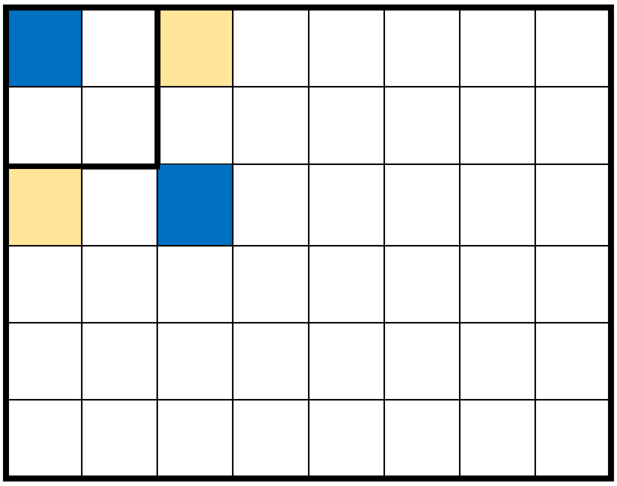
Вот один из возможных вариантов раскраски, в котором используются только 2 различных цвета (синий и жёлтый):



Примечание

Поясним, как можно было придумать подходящий пример раскраски в два цвета. Покрасим каждую клетку любого квадрата 2 × 2 на доске в один из двух цветов. Пусть для определённости мы покрасили квадрат 2 × 2 в левом верхнем углу. Раскрашивать клетки этого квадрата **можно произвольным образом**[1], так как никакие две из них не являются «противоположными соседями» ни для какой клетки.

Начнём красить доску дальше, соблюдая условия задачи: например, третья клетка в первой строке должна иметь цвет, противоположный цвету первой клетки в первой строке. То же можно сказать и о первой клетке в третьей строке. Третья же клетка в третьей строке, напротив, должна быть того же цвета, что и первая клетка в первой строке:



Оказывается, что, используя аналогичные рассуждения, можно однозначно восстановить раскраску всей доски по раскраске одного квадрата 2 × 2. Поэтому все возможные способы раскраски квадрата 2 × 2 как раз дадут все возможные варианты раскраски доски (их 16).

5. Сделаем вывод.

Мы показали, как раскрасить доску требуемым образом в 2 цвета и доказали, что меньшим числом цветов обойтись нельзя. Таким образом, мы обосновали ответ «2 цвета» на вопрос задачи.

6. Проведем самопроверку примера.

Алгоритм самопроверки дан отдельным файлом.

[1] Строгое доказательство данного факта следует из изложенного в разделе «Приложение» (с. 4–6).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для ознакомления приведем цепочку рассуждений, которая могла привести к решению задачи. Эта логическая цепочка строится на основе анализа взаимосвязей задачи. Она также позволяет построить все возможные примеры подходящей раскраски в 2 цвета (с точностью до выбора конкретных цветов).

Путь к решению (не является частью решения)

1) Проанализируем возможную раскраску. Начнем с «узкого места» — угловой клетки доски (например, с верхней левой клетки доски). Обозначим эту клетку цифрой 1. (Будем далее отмечать клетки, которые должны быть обязательно раскрашены в один цвет, одинаковыми цифрами.) Тогда клетку, находящуюся от нее через одну по диагонали тоже отметим цифрой 1 (эти клетки являются противоположными по диагонали соседями серой клетки на рисунке).

Рассуждая аналогично, обозначим цифрой 1 еще несколько клеток:

1				1			
		1				1	
1				1			

2) Вернемся к клетке в верхнем левом углу доски. Заметим, что она находится в паре противоположных соседей по стороне для клетки, отмеченной на рисунке черным цветом. По условию задачи вторая клетка из этой пары должна иметь цвет, отличный от 1-го. Обозначим эту клетку цифрой 2.

1		2		1			
		1				1	
1				1			

3) Проводя рассуждения, аналогичные проведенным в пункте 1, отметим еще несколько клеток цифрой 2:

1		2		1		2	
2		1		2		1	
1		2		1		2	

4) Рассмотрим вторую слева клетку в верхней горизонтали доски. Предыдущие рассуждения не дают возможности однозначно понять, должен ли ее цвет совпадать с каким-то из цветов клеток 1-й или 2-й группы. Обозначим эту клетку цифрой 3.

Отметим еще несколько клеток цифрой 3:

1	3	2		1	3	2	
2		1	3	2		1	3
1	3	2		1	3	2	

5) Обозначим четвертую слева клетку верхней горизонтали цифрой 4. Снова отметим подходящие клетки цифрой 4:

1	3	2	4	1	3	2	4
2	4	1	3	2	4	1	3
1	3	2	4	1	3	2	4

6) Мы разделили все клетки нечетных горизонталей на 4 группы. При этом клетки, обозначенные одной цифрой, должны быть раскрашены в один цвет. Кроме того, клетки 1-го и 2-го типа должны быть разного цвета, а также клетки 3-го и 4-го типа должны иметь разный цвет.

7) Рассуждая аналогично описанному в пунктах 1–6 для четных горизонталей, получим еще четыре группы клеток, обозначенных цифрами 5, 6, 7 и 8. В итоге получим, что все клетки разбиты на 8 групп:

1	3	2	4	1	3	2	4
5	7	6	8	5	7	6	8
2	4	1	3	2	4	1	3
6	8	5	7	6	8	5	7
1	3	2	4	1	3	2	4
5	7	6	8	5	7	6	8

8) Итак, имеют разные цвета клетки типов: 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8. Других ограничений на цвета нет, поэтому достаточно использовать всего два цвета. Например, можно раскрасить все клетки, обозначенные нечетными числами в один цвет, а все клетки, обозначенные четными числами — в другой. Это и приводит к показанному в решении примеру раскраски. (Все возможные примеры раскраски получаются, когда из каждой пары типов выбирается по одному, клетки которого будут раскрашены в 1-й цвет. Клетки второго типа из пары при этом раскрашиваются во 2-й цвет.)

Желаем успехов!
Делитесь вашими фотографиями и видеороликами в соцсетях!