ЗАРОЖДЕНИЕ АЛГЕБРЫ В НЕДРАХ АРИФМЕТИКИ. АЛ-ХОРЕЗМИ.

Алгебра появилась и постепенно развивалась в недрах арифметики. Долгое время этот раздел математики занимался только изучением вопросов, связанных с решением различных уравнений.

Первые алгебраические задачи встречаются еще в памятниках письменности древних цивилизаций и датируются третьим тысячелетием до н.э. Например, в Древнем Египте для обозначения неизвестного использовали специальный иероглиф «хау» , который означал «кучу». Одна из задач папируса Ахмеса гласит: «Куча и её седьмая часть составляет 19». Сейчас мы нашли бы значение «кучи» составив уравнение $x + \frac{1}{7}x = 19$. Древнеегипетский математик решал задачу так: для удобства значение «кучи» приравнивалось к 7, но тогда правая часть уравнения давала 8, а не 19, как в условии; значит? предполагаемое значение «кучи» надо было увеличить в 19 раз и уменьшить в 8 раз, что давало 7 · 19 : 8 или $16\frac{5}{8}$. Такой способ рассуждений получил название *правила ложного положения*. Похожим правилом пользовались в древнем Вавилоне и Китае. Древнекитайские математики разработали прием «фан-чен» для решения уравнений и их систем с двумя и большим числом неизвестных, а вавилоняне могли решать частные виды уравнений с неизвестной величиной во второй и даже третьей степени. При этом в обозначении неизвестных прослеживалась определённая геометрическая аналогия: они записывались знаками, обозначающими «длину», «ширину» или «глубину», а их степени соответствовали символам «поле» (в значении «площадь» как произведение «длины» и «ширины») и «объем».

Похожий подход применяли и древние греки. В своей «геометрической» алгебре они обозначали величины отрезками. При этом и все арифметические операции над величинами заменялись соответствующими операциями над отрезками (рис. 1). В «Началах» Евклида приведено доказательство алгебраического тождества $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ средствами геометрической алгебры. Там же приводится геометрическое решение уравнений вида $ab = cx$ и других, более сложных. В искусстве решения уравнений с помощью геометрической алгебры древнегреческие математики достигли мастерства, но уравнения с неизвестным в степени выше третьей не имели в ней смысла и соответствующей геометрической интерпретации. Преодолеть это затруднение и двинуться дальше в развитии алгебры смог один из последних ученых александрийской эпохи – Диофант (III в.), которого многие считают «отцом алгебры».

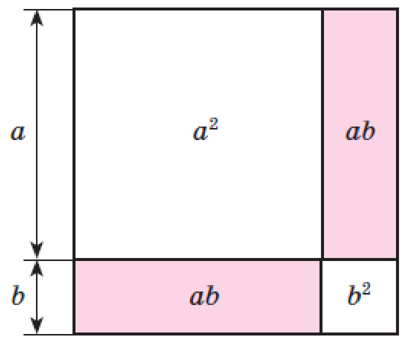

Рис. 1. Формула квадрата суммы на языке "геометрической алгебры"

В труде «Арифметика» он впервые ввел полную и последовательную систему алгебраической символики, обладающую существенным преимуществом перед словесными описаниями, используемыми его предшественниками, и избавил алгебру от «геометрических оков». Диофант предложил символы для неизвестной величины, шести положительных и шести отрицательных её степеней. При этом четвертую, пятую и шестую степень он трактовал как квадрато-квадрат, квадрато-куб и кубо-куб. В «Арифметике» Диофанта приводятся пояснения к решению 189 задач, среди которых имеется и классификация уравнений вида $ax^2 + bx = c$. По сути он пользуется правилом замены знака при переносе вычитаемого из одной части уравнения в другую и правилом «уничтожения» равных членов, стоящих по разные стороны от знака равенства. Долгое время сочинения Диофанта оставались неизвестными: их арабский перевод появился в X в., а на латинском языке они стали доступны европейским математикам только с XVI в.

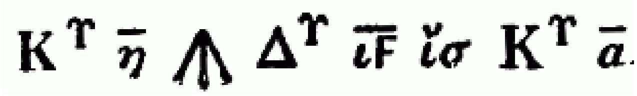
Рис. 2. Пример записи уравнения у Диофанта: $8x^3 - 16x^2 = x^3$

Титул «отца алгебры» по праву делит с Диофантом один из крупнейших средневековых математиков – аль-Хорезми.

Рис. 3. Почтовая марка, 1983 г.

Абу Абдуллах Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми (ок.783 – ок.850) – узбекский математик, астроном и географ. Большую часть своей жизни провел в Багдаде, возглавляя созданный халифом аль-Мамуном «Дом Мудрости»[1] – центр интеллектуальной культуры исламского средневековья, содержащий богатейшую библиотеку и астрономическую обсерваторию. Среди его математических трактатов наибольшую известность получили «Книга об индийском счете» и «Книга о восстановлении и противопоставлении». Вплоть до XVI века переводы этих книг использовались в европейских университетах как основные учебники по математике. В трактате «Книга картины Земли» аль-Хорезми представил описание мира по системе Птолемея, дал карту с 2402 населёнными пунктами, сформулировал определение широты и долготы и указал с их помощью координаты важнейших мест. В астрономическом трактате он рассказывает о календаре, расчетах затмений и местоположении планет, определении видимости луны и др.

До наших дней дошел экземпляр «Книги о восстановлении и противопоставлении» на арабском языке. Её латинский перевод сохранил арабское название «Китаб аль-джебр валь-мукабала», которое с течением времени сократилось до «Альджебр». С тех пор учение о решении уравнений стали называть «алгебра».

Аль-Хорезми впервые представил алгебру как науку об общих методах решения линейных и квадратных уравнений. Неизвестную величину он называет «джизр», что переводится как «корень»; индийские математики использовали с этой же целью слово «мула» – корень растения.

Уравнения аль-Хорезми решает с помощью трех приемов:

1) «аль-джебр» соответствует операции переноса вычитаемого из одной части уравнения в другую. Так как отрицательные числа считались неполноценными, то перенесение их в другую часть уравнения делало их положительными и как бы «восстанавливало» их, превращая в настоящие числа.

2) «аль-мукабала» или «противопоставление» означало отбрасывание из обеих частей уравнения одинаковых членов.

3) «аль-хатт» – прием, при котором все члены уравнения нужно было разделить на одно и то же число.

Например, при решении уравнения $8x – 16 = 5x – 4$,
прием «аль-джебр» даст: $8x + 4 = 5x + 16$,
после приема «аль-мукабала», получим: $3x = 12$,
и применяя «аль-хатт»: $x = 4$.

Аль-Хорезми выделяет шесть видов линейных и квадратных уравнений. Приведем в таблице его классификацию:

	Тип уравнения по аль-Хорезми	**Современный вид**	**Пример уравнения**
1.	«квадраты равны корням»	$ax^2 = bx$	$x^2 = 5x$
2.	«квадраты равны числу»	$ax^2 = c$	$3x^2 = 75$
3.	«корни равны числу»	$ax = c$	$6x = 18$
4.	«квадраты и корни равны числу»	$ax^2 + bx = c$	$x^2 + 10x = 39$
5.	«квадраты и числа равны корням»	$ax^2 + c = bx$	$x^2 + 21 = 10x$
6.	«корни и числа равны квадрату»	$bx + c = ax^2$	$3x + 10= x^2$

Очевидно Аль-Хорезми не был знаком с символикой Диофанта, поэтому его алгебра остается словесной и каждое правило иллюстрируется конкретным примером. Так, правило для уравнений пятого вида он рассматривает на примере решения уравнения $x^2 + 21 = 10x$. *«Правило таково: раздвой число корней, получится 5. Умножь это на равное, будет 25. Вычти из этого 21, останется 4. Извлеки из этого корень, будет 2. Вычти это из пяти, получится 3. Это и будет корень, который ты искал. Если хочешь прибавить этот корень к половине числа корней, будет 7. Это тоже корень, который ты искал»*.

[1] «Дом мудрости» был разрушен в 1258 г. монголами. По легенде, воды реки Тигр окрасились в черный цвет от чернил книг, погибших в ней.

Для решения некоторых уравнений приводится геометрическая интерпретация. Например, уравнение 4-го типа $x^2 + 10x = 39$ аль-Хорезми решал так (рис. 4):

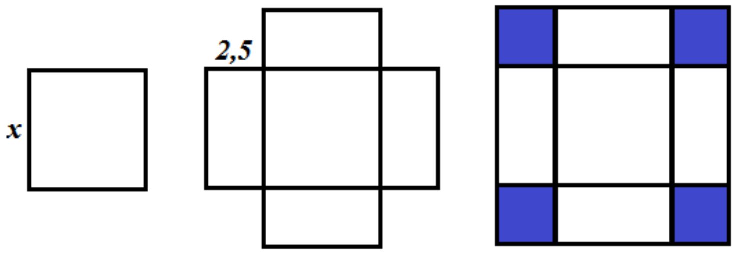

Рис. 4. Геометрическая иллюстрация к решению квадратного уравнения

1. Построй квадрат со стороной x.

2. На каждой стороне квадрата построй прямоугольник со стороной 2,5 (10 : 4 = 2,5).

3. Дострой до полного квадрата. Учти, что площадь каждого дополнительного квадрата равна $2{,}5^2 = 6{,}25$*, а всех четырех* $4 \cdot 6{,}25 = 25$.

4. Площадь белой части фигуры – это $x^2 + 10x$*, и она равна 39, а все вместе 39 + 25 = 64. Значит сторона нового большого квадрата 8. Или* $2{,}5 + x + 2{,}5 = 8$*, то есть* $x = 3$.

Решив это уравнение современным способом, получим два корня: *3* и *–13*. Отрицательный корень «геометрическим» методом аль-Хорезми получить нельзя.

Сравнивая приведенные выше решения квадратных уравнений Аль-Хорезми с тем способом, которым мы пользуемся сейчас, можно по праву оценить удобство современной символики и используемых формул.

В XII веке алгебраический трактат аль-Хорезми попал в Европу. С этого времени начинается бурное развитие алгебры. Появляются общие способы решения уравнений 3-й и 4-й степеней. В XIX веке доказали, что общей формулы для корней уравнения выше 4 степени не существует.

С развитием математики предмет алгебры существенно расширился. Та алгебра, которая сейчас изучается в школе, получила название «элементарная алгебра». К XIX в. появились попытки использовать удобную алгебраическую символику для представления не только числовых величин, но и, например, высказываний. Так появилась «алгебра высказываний», связанная с математической логикой. «Линейная алгебра» изучает векторные пространства. К XX веку алгебра приобрела аксиоматическую основу. Современная алгебра изучает различные структуры и их свойства в отрыве от природы их объектов.

Задания:

1. Реши уравнения, применяя методы аль-Хорезми:

а) $8x - 7 = 5x - 1$; *в)* $x^2 + 7 = 8x$;

б) $5x - 9 = 12 - 2x$; *г)* $x^2 + 4x = 45$.

2. Сравни методы решения уравнения, предложенные аль-Хорезми и современные методы. Чем они похожи, а чем отличаются?

3. Реши задачу из трактата аль-Хорезми: «Найди такое число, что если отнять от него его треть и четверть, то останется 8».

Источники:

1. Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. – М.: Наука, 1967.
2. Дорофеева А.В. Страницы истории на уроках математики // Квантор. – 1991. – №6.
3. Еганян А.М. Из истории алгебры. – Ереван: Луйс, 1977.
4. Крилли Т. Математика. 50 идей, о которых нужно знать. – М.: Фантом Пресс, 2014.
5. Полак Л. С. Уильям Роуэн Гамильтон (к 150-летию со дня рождения) // Труды Института истории естествознания, 1956. – Т. 15.
6. Сираждинов С.Х., Матвиевская Г.П. Ал-Хорезми – выдающийся математик и астроном средневековья. – М.: Просвещение, 1983.
7. Юшкевич А.П. История математики в средние века. – М.: Физматгиз, 1961.