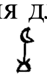
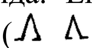
РОЖДЕНИЕ И РАЗВИТИЕ АРИФМЕТИКИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Арифметика – раздел математики, связанный с изучением свойств чисел и правил действий с ними. Она возникла на заре человеческой цивилизации из практических потребностей в счете и вычислениях. Термин происходит от древнегреческого слова «арифмос» – число.

Арифметические познания древних цивилизаций были примерно одинаковы, хотя и отличались по форме. Для обозначения чисел древние египтяне и китайцы использовали иероглифы, вавилоняне – клинопись, индийцы и индейцы майя – символы. Запас чисел был невелик и ограничивался, как правило, натуральными числами и дробями[1].

Египтяне пользовались десятичной непозиционной системой записи чисел, т.к. имели специальные обозначения для единицы – , десятка – , сотни (десятка десятков) – , тысячи (десятка сотен) –  и т.п. Число записывалось повторением иероглифов соответствующего разряда. Египтяне имели специальные иероглифы для обозначения сложения и вычитания ( – ноги человека, движущегося в ту или иную сторону). Сложение производилось путем приписывания одинаковых знаков с заменой десяти иероглифов одного разряда иероглифом следующего разряда. Вычитание выполнялось как действие, обратное сложению, т.е. отыскивалось такое число, которое надо прибавить к вычитаемому, чтобы в сумме получить уменьшаемое. Умножение сводилось к удвоению и сложению нужных результатов[2]. Например, чтобы найти произведение 35 · 12, поступали так, как на рис. 1. Деление выполнялось как действие, обратное умножению. Для выполнения более сложных расчетов применяли специально составленные таблицы. Например, папирус Райнда содержит таблицу с результатами деления числа 2 на числа от 3 до 101.

1 – 35
2 – 70
/4 – 140
/8 – 280
Вместе: **420**

Рис. 1. Умножение удвоением

Вспомогательные таблицы широко использовались для арифметических расчетов и в Древнем Вавилоне. Сохранились таблицы умножения чисел, таблицы обратных чисел, таблицы квадратов и кубов натуральных чисел и др. Сложение в клинописной системе счисления, сводилось к простому перемещению слагаемых рядом друг с другом, аналогично тому, как это делали и египтяне. Для вычитания использовался знак «лал» – , означающий «без»[3]. Умножение и деление выполнялось с помощью специальных таблиц. Это связано с тем, что если в используемой нами таблице умножения 10×10, достаточно выучить только 36 небольших по значению результатов, то в таблице умножения древних вавилонян потребовалось бы помнить 1711 результатов, выражающихся громоздкой записью. Для выполнения деления вавилоняне использовали таблицы обратных величин. Они владели правилом нахождения неизвестного члена пропорции и имели представление об арифметической и геометрической прогрессиях[4].

Наследниками математической культуры египтян и вавилонян стали древние греки. Они значительно обогатили арифметику результатами своих исследований. Арифметика приобрела новое качество, она стала теоретической. Практическая арифметика, которой греки дали название «логистика», продолжала служить нуждам торговли и заниматься совершенствованием вычислительных правил, а теоретическая арифметика исследовала логические обоснования этих правил и арифметические закономерности в природе, музыке, и даже во всей вселенной в целом.

---

[1] Подробнее о дробях в математике древних см. разделы «Дроби в Древнем Вавилоне», «Дроби в Древнем Египте», «Дроби в Древнем Риме».

[2] Заметим, что такой способ умножения использовал Лев Толстой в созданной им в Ясной поляне школе и в написанном учебнике «Арифметика» (1874).

[3] Подробнее об этом знаке см. раздел «Появление цифр, букв, иероглифов на ближнем востоке. Рождение шестидесятеричной системы счисления».

[4] Вы будете изучать эти особые последовательности в 9 классе.

Пифагор Самосский (ок. 580 – 500 до н.э.) и его ученики с помощью чисел пытались постичь и описать все мироустройство. Они ввели понятия четных и нечетных чисел, простых и составных чисел, многоугольных чисел (треугольных, квадратных и др. – см. рис. 2), дружественных[5] и совершенных чисел[6] и др. Евдокс Книдский (ок. 408 – 355 до н.э.) фактически разработал общую теорию пропорций. Теэтет Афинский (ок. 417 – 369 до н.э.) разработал теорию делимости натуральных чисел. Евклид (ок. III в. до н.э.) в своих «Началах» описал способ нахождения наибольшего общего делителя двух чисел, известный сейчас как *алгоритм Евклида*[7]. Архимед (ок. 287 – 212 до н.э.) в сочинении «Исчисление песчинок» предложил способ наименования больших чисел и, по сути, построил позиционную систему счисления с основанием «мириада мириад», т.е. 100 000 000. Эратосфен Киренский (ок. 276 – 194 г. до н.э.) изложил способ нахождения простых чисел, получивший название *решето Эратосфена*. Отдельные вопросы арифметики встречаются в исследованиях Платона, Никомаха, Архимеда и др. Диофант Александрийский (ок. III в.) в своем труде «Арифметика» обобщил арифметические знания древних греков. Он свободно владел не только целыми числами, но и дробями; пользовался правилами действий с положительными и отрицательными числами. «Арифметика» Диофанта стала отправной точкой для теоретико-числовых исследований П. Ферма, Л. Эйлера, К. Гаусса и других математиков.

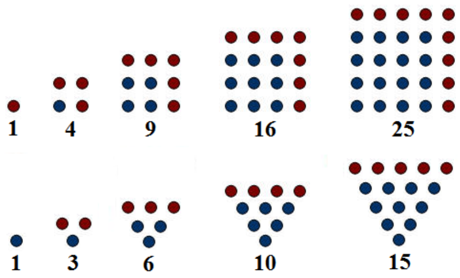


Рис. 2. Квадратные и треугольные числа

Десятичная позиционная система счисления, которая существенно упростила выполнение арифметических действий с натуральными числами, развивалась в Индии. Индийские математики разработали большое количество различных приемов для выполнения арифметических действий. Арифметический трактат Бхаскары (XII в.) «Лилавати» (т.е. «прекрасная»), содержит описание приема умножения натуральных чисел методом решетки (рис. 3). Этот же прием умножения встречается и в более поздних трудах уже у европейских математиков.

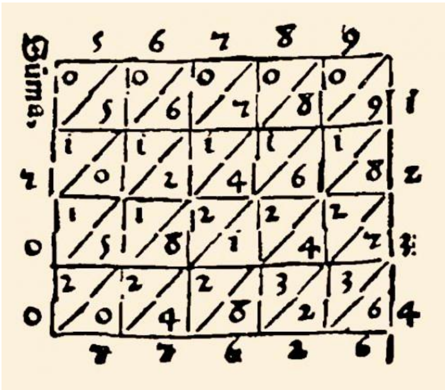


Рис. 3. Умножение методом решетки
56789 x 1234 = 70077626

В средние века активно развивалась коммерческая арифметика и приближенные вычисления. Большой вклад в развитие арифметики в VIII-XV вв. внесли ученые стран ислама. Ал-Хорезми (783–850) в «Книге об индийском счете» дает четкие правила выполнения таких арифметических операций как сложение и вычитание, удвоение и раздвоение, умножение и деление и др. Омар Хайям (1048–1131) и ат-Туси (1201–1274) исследовали правила извлечения арифметических корней[8]. Ал-Каши (1380–1429)

[5] Два числа являются дружественными, если каждое из них равно сумме собственных делителей другого. Например, число 220 имеет делители 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 и 110. Их сумма равна 284. А число 284 имеет делители: 1, 2, 4, 71 и 142. Их сумма равна 220. Таким образом, числа 220 и 284 дружественные. В наше время с помощью компьютеров найдено более миллиарда пар дружественных чисел, все они оказались одинаковой четности. Но до сих пор математиками неизвестно, существуют ли пары дружественных чисел разной четности, не найдено общего способа нахождения дружественных чисел, неясно, конечно или бесконечно их количество. Заметим, что одну из пар дружественных чисел (1184 и 1210), неизвестную ранее математикам, в 1866 г. обнаружил итальянский школьник Никколо Паганини.

[6] Число является совершенным, если оно равно сумме своих собственных делителей. Так, число 28 имеет собственные делители 1, 2, 4, 7 и 14. Их сумма равна 28. Математикам пока не известно существует ли нечетное совершенное число, да и вообще, конечно или бесконечно множество совершенных чисел.

[7] С этим алгоритмом вы познакомитесь в 7 классе.

[8] Вы научитесь извлекать корни в 8 классе.

распространил правила выполнения арифметических действий с натуральными числами на десятичные дроби.

В европейской культуре арифметика являлась одним из семи свободных искусств и считалась необходимым элементом подготовки образованного человека. Долгое время, вслед за Гербертом (946–1003), ставшим позднее папой Римским Сильвестром II, в Европе использовали счет на абаке и запись чисел римскими цифрами. С появлением первых латинских переводов трудов арабских математиков, в Европе стала распространяться десятичная система счисления и способы арифметических действий в ней. В «Книге абака» (1202) Леонардо Пизанского (Фибоначчи) был предложен используемый нами сейчас способ чтения многозначных чисел путем их разбиения на группы по три цифры с конца. Фибоначчи использовал ноль наравне с другими числами, пользовался признаками делимости на 2, 3, 5 и 9, приводил дроби к общему знаменателю с помощью наименьшего общего кратного, излагал правила пропорций и др. Различным вопросам арифметики были посвящены работы известных европейских математиков Т. Брадвардина, Н. Орема, Н. Шюке, Л. Пачоли, Дж. Кардано, Р. Бомбелли, Ф. Виета, С. Стевина, М. Штифеля и др.

С появлением книгопечатания в работах европейских математиков вводятся специальные обозначения и знаки для арифметических действий. Немецкий математик Иоганн Видман в трактате «Быстрый и приятный счет для всех торговцев» (1489) впервые использует для обозначения операций сложения и вычитания знаки «+» и «–». Английские математики ввели в оборот знаки сравнения: Роберт Рекорд знак равенства «=», Томас Хэриот знаки больше «$>$» и меньше «$<$», а Джон Валлис знаки нестрогого сравнения «$\geq$» и «$\leq$». Знак «$\neq$» – не равно – предложил использовать Леонард Эйлер, а символ приближенного равенства – «$\approx$» немецкий математик Зигмунд Гюнтер в 1882 г. Голландец Альбер Жирар предложил использовать круглые скобки «( )», знак арифметического корня «$\surd$» и знак «$\pm$». Знаки умножения в виде «$\times$» и деления в виде «/» ввел англичанин Уильям Отред, а швейцарец Иоганн Ран использовал для них соответственно знаки «$*$» и «$\div$». В 1684 г. немецкий математик Лейбниц стал использовать для умножения и деления соответственно знаки «$\cdot$» и «:». Некоторые арифметические знаки появились в XX веке, как, например, знаки значительно меньше «$\ll$» и значительно больше «$\gg$», введенные в своих работах французскими математиками Анри Пуанкаре и Эмилем Борелем. Процесс формирования арифметической символики продолжается и сейчас.

На Руси для обозначения натуральных чисел вплоть до XVII в. использовалась алфавитная система счисления. В математических рукописях XVI в. арифметику называли «цифирная счетная мудрость». Первая арифметическая книга на русском языке, «Считание удобное …», была напечатана в Москве в 1682 г. Она содержала таблицу умножения в алфавитной системе счисления вплоть до 100×100. В 1699 г. И. Копиевичем было издано «Краткое и полезное руковедение во аритметыку», содержащее сведения о десятичной нумерации и первых четырех действиях над натуральными числами. Первым систематическим курсом арифметики на русском языке, оказавшем значительное влияние на развитие математических знаний в России, стала «Арифметика» Л.Ф. Магницкого, опубликованная в 1703 г.

В XVII – XVIII веках развитие науки и техники, более сложные коммерческие расчеты дали новый толчок развитию арифметики и технике вычислений. Крупнейшие математики Дж. Непер, П. Ферма, И. Ньютон, Л. Эйлер, И. Ламберт, Ж. Лагранж, К. Гаусс, П. Л. Чебышёв и др. исследовали различные вопросы арифметики и теории чисел. Появились первые счетные механизмы[9], ставшие прообразом электронных

[9] Первыми счетными механизмами можно считать суммирующую машину Паскаля (1643) и арифмометр Лейбница (1673).

вычислительных машин[10] и затем компьютеров, появившихся в конце XX века. Окончательная теория обоснования натуральных чисел была построена только в первой трети XX века в работах Джузеппе Пеано, Давида Гильберта и Курта Гёделя.

Задания

1) Выполни умножение чисел древнеегипетским способом: а) 35 · 6; *б)* 71 · 19.

2) Рассмотри иллюстрацию к «методу решетки» (рис. 3). Как заполняются клетки решетки? Как число записывается внутри клетки? Попробуй сформулировать, в чем заключается «метод решетки». Проверь свое предположение с помощью информации из Интернета. Выполни умножение этим методом: а) 572 ·361; *б)* 934 · 314.

3) Рассмотри внимательно изображения квадратных и треугольных чисел на рис. 2. Как они между собой связаны? Проверь свои гипотезы, определив последующие пять квадратных и треугольных чисел.

4) Пифагорейцы считали, что суммы последовательных нечетных чисел, начиная с 1, являются точными квадратами. Т.е. $1 = 1^2$, $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$ *и т.д. Проверь, выполняется ли эта зависимость дальше. Как ты можешь объяснить эту закономерность?*

5) Пифагорейцы геометрически доказали, что любое нечетное число является разностью двух последовательных квадратов. Т. е. $1 = 1^2 – 0^2$, $3 = 2^2 – 1^2$, $5 = 3^2 – 2^2$ *и т.д. Проверь этот факт, и найди для него геометрическую иллюстрацию.*

6) Выясни, каким по порядку совершенным числом является число 28. Выпиши все предшествующие ему совершенные числа.

7) Найди с помощью Интернета список совершенных чисел. Сколько их удалось обнаружить к настоящему моменту? Какими цифрами оканчиваются совершенные числа? Как ты думаешь, почему?

Источники

1. Беллюстин В.К. Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. – М.: Учпедгиз, 1940.
2. Володарский А.И. Очерки истории средневековой индийской математики. – М.: Наука, 1977.
3. Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. – М.: Наука, 1967.
4. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986.
5. Малаховский В.С. Числа знакомые и незнакомые. – Калининград: Янтарный сказ, 2004.
6. Молодший В.Н. Основы учения о числе в XVIII веке. - М.: Учпедгиз, 1953.
7. Теологумены арифметики / Перевод В.В. Бибихина и А.И. Щетникова. – Новосибирск: Артель «Напрасный труд», 2007.

[10] Первый электронный «калькулятор» появился в 1957 году и весил 140 кг. Первый карманный калькулятор появился в 1971 г. Он умел выполнял только 4 арифметических действия и при этом стоил 240$.