ПОЯВЛЕНИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В МАТЕМАТИКЕ ДРЕВНОСТИ. РОЛЬ ДИОФАНТА. ПОЧЕМУ (–1) · (–1) = +1?

Как правило, появление чисел было связано с потребностями практической деятельности человека. Так, натуральные числа возникли из проблемы пересчета предметов. При проведении измерений, когда результат не выражался целым числом, возникла необходимость рассматривать дробные числа. Отрицательные числа возникли в связи с понятием собственности, а именно ассоциировались с понятием «долг», и длительное время не воспринимались как самостоятельные, в отрыве от этого понятия.

Древние египтяне, вавилоняне и греки не использовали отрицательных чисел и, если получали в результате решения уравнения отрицательный корень, то отбрасывали его, не видя в нем смысла.

Первые свидетельства использования отрицательных чисел встречаются в трактате «Математика в девяти книгах» древнекитайского ученого Чжан Цан. До наших дней дошел её вариант, датируемый II веком до н.э., но есть все основания предполагать, что это список с более древнего сочинения «Цзю шу» XII в. до н.э. В этом трактате отрицательные числа обозначались иероглифом «фу», означающим долг, недостачу. Для положительных чисел использовался иероглиф «чжень», соответствующий словам «правильный», «справедливый», а трактовались эти числа как имущество. Знака минус еще не было, и чтобы отличать отрицательные числа от положительных, их записывали разным цветом: положительные – красным, а отрицательные – черным. Такой способ обозначения чисел сохранялся в Китае вплоть до XIII века, когда китайский математик Ли Е начал в своих работах перечеркивать косой чертой последнюю цифру в записи отрицательного числа.

Что касается возникновения правил действий с отрицательными числами, то уже в «Математике в девяти книгах» формулировались правила сложения и вычитания для положительных и отрицательных чисел. Правила для умножения впервые встречаются гораздо позже – в III веке в «Арифметике» Диофанта[1]: «Недостаток, умноженный на недостаток, дает наличие; недостаток же, умноженный на наличие, дает недостаток». Эти правила он применяет в ходе преобразований различных выражений, которые сейчас мы бы назвали буквенными. При этом у Диофанта по-прежнему отсутствуют знаки «+» и «–». Перед буквенными произведениями с отрицательными коэффициентами Диофант ставил знак ⋔. Самостоятельного значения за отрицательными числами Диофант не признавал, и если при решении уравнения получался отрицательный корень, его не учитывал.

Индийские математики называли положительные числа «дхана» или «сва», что означало «имущество», а отрицательные – «рина» или «кшайя», что понималось как «долг». Уже в VII веке Брахмагупта в своих работах демонстрирует широкое использование отрицательных чисел и правила действий с ними: «Сумма двух имуществ – имущество. Сумма двух долгов – долг. Сумма имущества и долга равна их разности. Произведение двух имуществ или двух долгов есть имущество; произведение имуществ на долг есть убыток. То же правило имеет место и при делении». В середине IX в. индийский математик Магавира писал: «Квадрат положительного или отрицательного числа положителен». Однако отрицательные числа так и не получили широкого распространения. В XII в Бхасхара II отмечал, что «люди не одобряют отрицательных чисел».

---

[1] Диофант Александрийский – древнегреческий математик, вошедший в историю как «отец алгебры» благодаря введению математической символики и обозначению различных степеней неизвестного буквами. Диофант первым из греческих математиков стал рассматривать дроби наравне с натуральными числами. Именно на полях латинского перевода «Арифметики» Диофанта в 1637 году французский математик Пьер Ферма сформулировал условие теоремы, названной позже «Великой теоремой Ферма». Поиском её доказательства занимались многие выдающиеся математики, но удалось это лишь Эндрю Уайлсу в 1995 году.

Первое описание отрицательных чисел в европейской литературе появилось в «Книге абака» (1202 г.) Леонардо Пизанского, который интерпретировал их в индийской традиции – как долг. Такой чисто практический подход к пониманию отрицательных чисел тормозил их дальнейшее развитие и препятствовал принятию. Действительно, какой реальный смысл может иметь умножение имущества на долг? Долгое время математики называли отрицательные числа «ложными» и «абсурдными». Считалось, что, если из 0 вычесть любое число, то ответом будет 0, так как ничто не может быть меньше нуля — пустоты.

В 1484 году французский математик Никола Шюке написал трактат «Наука о числах в трех частях». Он описал в нем правила действий с отрицательными числами, обозначая их как «0 – *n*»: «Кто складывает минус с каким-то числом, тот получает меньшую сумму, а кто вычитает минус, тот получает больший остаток. … Когда говорят «минус», то это означает, что у человека ничего нет и ещё он должен».

Самостоятельно знаки «+» и «–» для обозначения положительных и отрицательных чисел стал использовать немецкий математик Иоганн Видман в работе «Быстрый и приятный счет для всех торговцев» (1489 г.)[2]. В 1544 г. другой немецкий математик, Михаэль Штифель, в своей «Полной Арифметике» определил отрицательные числа как «меньше, чем ничего», освободив их от привязки к понятию долга и поясняя их место: «Ноль находится между истинными и абсурдными числами».

К началу XVII века в такой трактовке отрицательные числа находят признание в работах англичанина Хэрриота, итальянца Бомбелли, французских математиков Жирара и Декарта и др. Рене Декарт в «Геометрии» (1637 г.) закрепляет геометрическое толкование отрицательных чисел. На числовой прямой отрицательным числам он сопоставил точки слева от нуля, а положительным – справа.

Но даже после этого математикам потребовалось еще около двух веков, чтобы признать отрицательные числа наравне с положительными. Особенно жаркие споры возникали при обсуждении сути арифметических действий с отрицательными числами. Так, знаменитый французский математик Блез Паскаль считал, что 0 – 4 = 0, так как «ничто не может быть меньше, чем ничто». Его друг Артур Арно выдвинул аргумент против отрицательных чисел, получивший название «парадокс Арно»: рассматривая равенство двух отношений $\frac{-1}{+1}=\frac{+1}{-1}$, он отмечал, что раз –1 меньше, чем +1, то как отношение меньшего числа к большему, может равняться отношению большего числа к меньшему? Джон Валлис в «Арифметике бесконечного» (1656 г.) принимал, что отрицательные числа меньше нуля, но на этой основе доказывал, что они больше, чем бесконечность. Непонятным было и определение умножения через сложение. Если, например, 3 · 4 означает, что число 3 нужно взять слагаемым 4 раза, то что означает запись 3 · (–4)? Как это взять число 3 слагаемым –4 раза? И почему (–1) · (–1) = +1? Даже самые крупные математики XVIII века давали этому крайне невнятные объяснения. Английский поэт У.Г. Оден по этому поводу писал:

Минус на минус – всегда только плюс.
Отчего так бывает, сказать не берусь.

К XIX веку математика как наука стремительно развивалась, она стала немыслимой без отрицательных чисел. В 1831 г. немецкий математик Карл Фридрих Гаусс, имевший незыблемый авторитет среди своих коллег и еще при жизни получивший от них звание «короля математики», признавал отрицательные числа наравне с положительными. Законченная строгая теория отрицательных чисел была создана только к середине XIX века в работах У. Гамильтона и Г. Грассмана.

---

[2] Заметим, что задолго до Видмана итальянские ростовщики в своих записях ставили рядом с именем должника ссуженную сумму с горизонтальной черточкой перед ней, которую зачеркивали после возвращения денег, таким образом, в записях это выглядело очень похоже на знаки «–» и «+».

Задания

1) *Подумай и запиши, где в своей повседневной жизни ты сталкиваешься с отрицательными числами.*
2) *Найди значение древнекитайских цифр, представленных на рисунке. Учитывая правило записи положительных и отрицательных чисел, вычисли их сумму. Ответ запиши древнекитайским иероглифом.*

3) *Реши задачи из трактата «Математика в девяти книгах».*
   а) 2 снопам хорошего урожая, 3 снопам среднего урожая и 4 снопам плохого урожая не хватает до 1 доу[3] соответственно по 1 снопу среднего урожая, плохого урожая, хорошего урожая. Спрашивается, сколько зерна получили из каждого снопа хорошего, среднего и плохого урожаев?[4]
   б) Продали 2 буйволов, 5 баранов, купили 13 свиней, осталось 1000 цяней. Продали 3 буйвола, 3 свиньи, купили 9 баранов, как раз хватило. Продали 6 баранов, 8 свиней, купили 5 буйволов, не хватило 600 цяней. Спрашивается, сколько стоят буйвол, баран и свинья?
   в) Имеется 5 воробьев и 6 ласточек, их взвесили на весах. Вес всех воробьев больше веса всех ласточек. Если переместить одну ласточку и одного воробья, то вес будет одинаковым. Общий вес всех ласточек и воробьёв 1 цзинь. Спрашивается, сколько весят ласточка и воробей?
4) *Реши задачу из Арифметики Диофанта.*
   Найди три такие числа, чтобы суммы их всех и каждых двух были квадратами.
5) *В Палатинской антологии (X в.) содержится эпиграмма-задача:*

   Прах Диофанта гробница покоит; дивись ей — и камень
   Мудрым искусством его скажет усопшего век.
   Волей богов шестую часть жизни он прожил ребёнком.
   И половину шестой встретил с пушком на щеках.
   Только минула седьмая, с подругой он обручился.
   С нею, пять лет проведя, сына дождался мудрец;
   Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.
   Отнят он был у отца раннею смертью своей.
   Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,
   Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Определи по этим данным количество лет, прожитых Диофантом

Источники

1. Березкина Э.И. Математика древнего Китая. – М.: Наука, 1980.
2. Володарский А.И. Очерки истории средневековой индийской математики. – М.: Наука, 1977.
3. Диофант. Арифметика и книга о многоугольных числах. – М.: Наука, 1974.
4. Ламберто Г.С. Замечательные числа. Ноль, 666 и другие бестии. – М.: Де Агостини, 2014.
5. Матвиевская Г.П. Учение о числе на средневековом Ближнем и Среднем Востоке. – Ташкент: ФАН, 1967.
6. Математика в девяти книгах // Историко-математические исследования. – М.: ГИТТЛ, 1957. – №10. – С. 439-584.
7. Токарева Т.А. Алгебра Шюке // Историко-математические исследования. – М.: Наука, 1978. – №23. – С. 270-283.
8. Alberto A. Martínez. Negative Math: How Mathematical Rules Can Be Positively Bent. – Princeton University Press, 2006.

---

[3] Доу – древнекитайская мера объёма, равная 10,354 литра.
[4] Именно в решении этой задачи встречается первое упоминание отрицательных чисел и правил арифметических действий с ними.