

## ШКОЛА ПИФАГОРА. ЧИСЛА И ДЛИНЫ ОТРЕЗКОВ. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. ПОТРЕБНОСТЬ В ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ.

Пожалуй, одним из самых мистических персонажей в истории математики является древнегреческий математик Пифагор Самосский, живший в VI в. до н.э. Сложно найти человека, который не слышал бы о теореме Пифагора, выражающей зависимость между длинами сторон прямоугольного треугольника. Между тем, упоминание этого факта встречается практически во всех древних математических культурах задолго до Пифагора. До наших дней не дошли сочинения Пифагора или даже их переложения другими авторами. Сохранившиеся сведения о Пифагоре обрывочны и часто противоречивы. Известно, что он много путешествовал и постигал знания эллинов и халдеев. Остановившись в Кротоне, на юге Италии, Пифагор основал сообщество своих учеников и последователей, которое было одновременно научно-философской школой, религиозно-мистическим союзом и даже политической организацией. Деятельность этого духовного братства была тайной, а все получаемые ими научные результаты оставались безымянными и не разглашались непосвященным.

В основе учения пифагорейцев лежал тезис «Все есть число!». Каждому числу придавался определенный смысл. Числовые отношения распространялись на музыку, космос и вообще все устройство мироздания. У пифагорейцев арифметика чисел стала не только собранием практических приемов действия над числами, но и приобрела теоретическую составляющую. Именно от пифагорейцев идет деление чисел на четные и нечетные, простые и составные, дружественные, совершенные, плоские и пространственные, треугольные, квадратные и многоугольные и др. Четные числа пифагорейцы считали женскими, а нечетные – мужскими, поэтому бракосочетанию соответствовало число 5, как сумма первого женского и мужского чисел. Первые четыре числа 1, 2, 3, 4 обозначали, по их мнению, первоэлементы вселенной: огонь, землю, воду и воздух. Сумма этих чисел – 10 – обозначала весь мир и служила одним из тайных символов пифагорейцев. К ней они обращались со следующими словами: «Благослови нас, о божественное число, породившее богов и людей! О святая, святая Тетраксис! В тебе источник и корни вечно цветущей природы! Ибо это божественное число начинается чистой и глубокой единицей и достигает священной четверки; затем оно порождает праматерь всего сущего, ту, что все объединяет, ту, что первой родилась, что никогда не отклоняется в сторону, ту, что никогда не утомляется, священную Десятку, ключ ко всем вещам»<sup>1</sup>.

Помимо целых чисел пифагорейцы изучали их отношения и создали теорию пропорций. Среди пропорций они выделяли арифметическую, геометрическую и гармоническую и такие же средние.

Для пифагорейцев было бесспорным, что всякие два отрезка соизмеримы между собой, т.е. всегда найдется третий отрезок, возможно малый и неделимый, который укладывается в каждом из этих двух отрезков целое число раз. Для нахождения общей меры двух отрезков (фактически наибольшего общего делителя их длин) пифагорейцы применяли алгоритм «попеременного вычитания», названный позднее алгоритмом Евклида. В качестве модели отношения двух натуральных чисел пифагорейцы рассматривали отношение двух отрезков. Это позволило им определить все арифметические действия на множестве отношений натуральных чисел.

Но вскоре, пифагорейская концепция о числовом устройстве бытия лопнула как мыльный пузырь. По роковой случайности причиной этому стало одно из самых почитаемых Пифагором открытий, известное нам как теорема Пифагора: квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

---

<sup>1</sup> Пифагорейцы так глубоко верили в совершенство 10, что придумали новую планету, назвав её Противоземлие. Во времена пифагорейцев было известно 9 небесных сфер (неба, Солнца, Луны, Земли, Меркурия, Венеры, Марса, Юпитера, Сатурна) и Противоземлие, будучи десятым, делало их картину мира целостной и завершенной.

Пытаясь выразить с помощью этой теоремы длину диагонали квадрата через его сторону, пифагорейцы осознали, что для этих отрезков не существует общей меры! Это открытие абсолютно противоречило созданной ими теории отношений: выразить длину диагонали квадрата с длиной стороны принятой за единицу с помощью рациональных чисел оказалось невозможно. Зная об этом открытии пифагорейцы должны были строго хранить эту тайну. Сейчас мы знаем, что этому отрезку соответствует число  $\sqrt{2}$ , которое является иррациональным, но древние математики не смогли осознать этот факт. Должны были пройти столетия, прежде чем понятие иррационального числа заняло достойное место в математике.

Когда ученые древности поняли, что множество длин отрезков богаче известного им множества рациональных чисел, в математике стали выделять дискретные (натуральные числа и их отношения) и непрерывные (длины, площади и объемы) величины. Для дискретных величин продолжали использовать старую теорию отношений, а для непрерывных построили новую, так называемую «геометрическую алгебру». Основными объектами в ней стали отрезки, прямоугольники и прямоугольные параллелепипеды, а основным методом доказательства – геометрическое построение. Описание геометрической алгебры содержится во второй книге «Начал» Евклида (III в. до н.э.).

Сложение отрезков производили путем приставления одного к другому. Вычитали всегда из большего отрезка меньший. Произведением двух отрезков являлся построенный на них прямоугольник, а произведением трех отрезков – прямоугольный параллелепипед. Произведение большего числа отрезков не имело геометрической интерпретации, что стало существенным тормозом в дальнейшем развитии греческой математики.

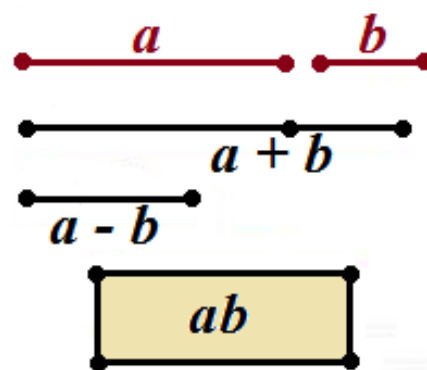


Рис. 1. Сложение, вычитание и умножение отрезков в геометрической алгебре

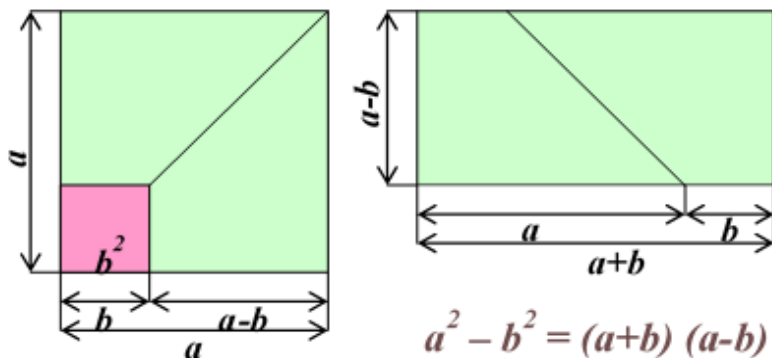


Рис. 2. Формула разности квадратов на языке "геометрической алгебры"

Средства геометрической алгебры позволяли доказать ряд алгебраических тождеств. На рисунке 2 приведена геометрическая интерпретация формулы разности квадратов.

Древнегреческие математики разработали методы нахождения среднего пропорционального двух отрезков и даже научились решать квадратные уравнения средствами геометрической алгебры. Однако, избежав необходимости в обосновании иррациональных чисел, они вынуждены были принять существенные ограничения геометрической алгебры: в ней не могли появиться отрицательные числа; нельзя было рассматривать уравнения выше третьей степени; нельзя было нарушать принцип однородности величин, складывая, например, отрезок с прямоугольником. Эти ограничения в итоге стали внутренними причинами упадка математики античности.

Лишь в IV в. до н.э. греческому математику Евдоксу Книдскому удалось построить такое определение величины, которое одинаково подходило как для дискретных, так и для непрерывных величин. На основе этого нового определения величины, Евдокс построил теорию отношений, которая удовлетворяла потребности математики вплоть до середины XIX в.

## Задания:

- 1) *Определи, о каком количестве учеников идет речь в задаче из «Греческой антологии».*  
– Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?  
– Вот сколько, – ответил философ. – Половина изучает математику, четверть – музыку. Седьмая часть пребывает в молчании, и, кроме того, есть еще три женщины.
- 2) *Построй в тетради три различных отрезка  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Найди средствами геометрической алгебры такой отрезок  $d$ , чтобы  $d = \frac{ab}{c}$ .*
- 3) *Построй геометрическую интерпретацию формулы квадрата разности:*  
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .
- 4) *Построй в тетради отрезок  $a$ . Приняв его длину за 1, построй отрезки, длины которых будут составлять:* а)  $\sqrt{2}$ ; б)  $\sqrt{3}$ ; в)  $\sqrt{5}$ ; г)  $\sqrt{6}$ ; д)  $\sqrt{7}$ .
- 5) *Проведи свое исследование с помощью стандартного листа бумаги формата А4:*
  - а) *Перегни лист по биссектрисе одного из его углов совместив два края этого угла листа бумаги. Предположи, как соотносятся длина большей стороны листа и образовавшаяся с помощью перегиба биссектриса прямого угла?*
  - б) *Повтори операцию перегиба для вновь образованного угла. Что ты теперь можешь сказать об этом соотношении? А о соотношении длины большей стороны листа к меньшей?*
  - в) *Измерь размеры листа с точностью до миллиметров. Вычисли отношение длин большей стороны к меньшей. Проверь свою гипотезу из предыдущего пункта задания.*
- 6) *Согласно одной из легенд Пифагор принес в жертву сто быков в знак благодарности богам за открытие своей теоремы. Этой легенде посвящены следующие строки:*

<i>«Ликует мудрый Пифагор:</i>	<i>Смешались головы, хвосты</i>
<i>У алтаря пугая взоры,</i>	<i>Животных, отданных на муку ...</i>
<i>Пылает жертвенный костер,</i>	<i>Вот почему с тех пор скоты</i>
<i>Кровавых туш дымятся горы.</i>	<i>Возненавидели науку».</i>

*Выясни, кто является автором приведенного фрагмента стихотворения.*

## Источники:

1. Альсина К. Секта чисел. Теорема Пифагора. – М.: Де Агостини, 2014.
2. Волошинов А.В. Пифагор: союз истины, добра и красоты. – М.: Просвещение, 1993.
3. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986.
4. Дорофеева А.В. Страницы истории на уроках математики // Квантор. – 1991. – № 6.
5. Жданов Ю.А. Отдай себя духу ... (Из поэтических тетрадей). – Ростов-н/Д: ЮФУ, 2014.
6. Жмудь Л. Я. Пифагор и его школа. — Л.: Наука, 1990.
7. Кольман Э.Я. История математики в древности. – М.: Физматгиз, 1961.
8. Скиннер С. Священная геометрия. Расшифровывая код. – М.: Кладезь-Букс, 2007.