НОД, НОК, ПРОСТЫЕ ЧИСЛА. РЕШЕТО ЭРАТОСФЕНА.

В 5 классе мы учились находить наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) двух чисел. Применять эти знания нам приходилось пока в основном для действий с обыкновенными дробями. Становясь старше, ты поймешь, что эти операции применяются и для других целей, причем не только в математике. Так было и в истории нашей науки: сначала понятия НОД и НОК и проблема их поиска возникали в контексте действий с дробями, а потом область их применения расширялась.

Алгоритм нахождения НОД древнекитайские математики сначала применяли лишь для сокращения дробей и для выражения основного свойства дроби. Способ нахождения НОД описывается в древнем китайском труде «Математика в девяти книгах», берущем свое начало в сочинениях XII в. до н.э. Для обозначения НОД китайцы использовали специальный термин «деньшу» (равное число). Чжан Цю-цзянь кратко излагает прием нахождения НОД путем попеременного вычитания числителя и знаменателя. Основная идея этого способа заключается в постепенной замене чисел, НОД которых следует отыскать, меньшими числами. Поиск НОД двух данных чисел заменяется поиском НОД их разности и меньшего из них до тех пор, пока разность не станет равной нулю. Подробнее ты познакомишься с этим способом в 7 классе. Сейчас его принято называть алгоритмом Евклида, потому что он был описан в одной из самой известных древних математических книг – «Началах» Евклида (III до н.э.). Но вряд ли этот метод был создан самим Евклидом, т.к. он встречается в IV веке до н.э. в «Топике» Аристотеля. Древние греки называли этот способ «взаимным вычитанием».

Первые упоминания о НОК также встречаются в древнем Китае, и тоже в связи с действиями с дробями. Древнекитайские математики находили НОК в ходе приведения дробей к общему знаменателю. Чтобы понять, как они это делали, разберем следующий пример. Приведем к общему знаменателю дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ так, как это делали в Древнем Китае. Сначала найдем наибольший из знаменателей этих дробей – 4. После умножим на него все дроби и сократим их: $\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{1\cdot 4}{2}=\frac{2}{1}$; $\frac{1}{3}\cdot 4=\frac{4}{3}$ и $\frac{1}{4}\cdot 4=\frac{4}{4}=\frac{1}{1}$. Теперь найдем наибольший из знаменателей полученных дробей, в нашем случае это 3. Повторим операцию умножения: $\frac{2}{1}\cdot 3=\frac{6}{1}$; $\frac{4}{3}\cdot 3=\frac{4}{1}$ и $\frac{1}{1}\cdot 3=\frac{3}{1}$. На этом этапе все знаменатели дробей оказались равны 1. Полученные таким образом числа 6, 4 и 3 являются дополнительными множителями, которые позволят привести исходные дроби к наименьшему общему знаменателю. Китайские математики делали это уже привычным и понятным нам способом, получая в общем знаменателе дробей НОК (2; 3; 4):

$$\frac{1^{(6}}{2}=\frac{1\cdot 6}{2\cdot 6}=\frac{6}{12};\ \frac{1^{(4}}{3}=\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{4}{12}\ \text{и}\ \frac{1^{(3}}{4}=\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{3}{12}.$$

В дальнейшем проблема нахождения НОК была выделена древнекитайскими математиками в самостоятельную и предлагалась в задачах уже без связи с дробями.

Индийские математики Ариабхата I, Брахмагупта и Шридхара находили общий знаменатель дробей путем перемножения всех знаменателей, а как мы понимаем, этот не самый рациональный способ не предполагал использования понятия НОК. И только Магавира (IX в.) впервые использует понятие наименьшего общего кратного, введя для него специальный термин «нирудха» и определяя его как «произведение общих множителей среди знаменателей». Современный способ приведения к общему знаменателю с помощью нахождения НОК берет начало на Востоке у Абу-л-Вафы (X в.), а в Европе встречается у Леонардо Пизанского (XIII в.).

Понятие НОД чисел приводит нас к еще одному общеизвестному понятию – понятию простых чисел. Интересно проследить и их историю. Исторические свидетельства говорят нам о том, что простые числа с глубокой древности привлекали внимание, а их поиск занимал умы многих известных математиков. Впрочем, не угасает этот интерес и сейчас. Самое большое известное на данный момент (февраль 2018 года) простое число было найдено 26 декабря 2017 года Дж. Пэйсом. Запись этого числа содержит 23 249 425 цифр! В настоящее время компания Electronic Frontier Foundation объявила премию в размере 250 000 долларов за нахождение простого числа, содержащего не менее 1 000 000 000 цифр в десятичной записи.

Но вернемся к истории. Археологами была найдена кость павиана (18 000 г. до н.э.) с зарубками, являющимися одними из самых древних математических «записей». Эта археологическая находка была обнаружена в области Ишанго на территории Конго и получила название «кость Ишанго». Удивительно, но часть зарубок на ней содержит по порядку все простые числа второго десятка (11, 13, 17, 19). Возможно, это только совпадение, но факт остается фактом.

«Начала» Евклида говорят нам о том, что древним грекам удалось существенно продвинуться в изучении свойств простых чисел. В этом труде содержится доказательство того, что простых чисел бесконечно много, а также того, что любое натуральное число можно представить в виде произведения простых чисел.

Древнегреческому математику Эратосфену (276 – 194 гг. до н.э.) приписывают способ получения простых чисел от 1 до некоторого числа. Он записывал по порядку все натуральные числа на восковой табличке, затем вычеркивал единицу (она имеет только один делитель) и оставлял первое простое число – 2. Затем выкалывал острой палочкой все числа, кратные двойке. Оставлял ближайшее уцелевшее после выкалывания число – 3 и выкалывал все следующие кратные ему числа. Он продолжал этот процесс и далее, а в его записях оставались числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 … При этом восковая табличка напоминала дырявое решето, через которое словно «просеивались» все составные числа. Поэтому данный способ и назвали – «решето Эратосфена»[1]. Пользуясь способом Эратосфена, достаточно легко найти первые простые числа, но чем больше они становятся, тем труднее это сделать.

В XVII веке значимые результаты в исследовании простых чисел были получены французскими математиками М. Мерсенном и П. Ферма. В XVIII веке существенно продвинулись в их изучении Г. Лейбниц и Л. Эйлер. В одном из писем Леонарду Эйлеру

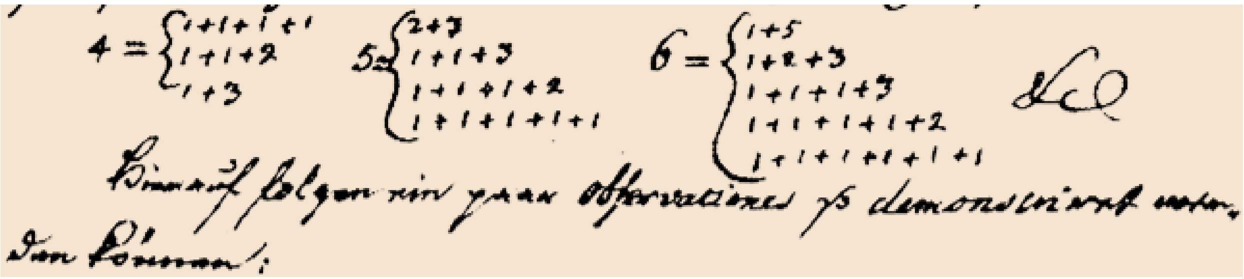

Рис. 1. Фрагмент Письма Х.Гольдбаха Л. Эйлеру (7 июня 1742)

Христиан Гольдбах высказал предположение о том, что любое нечетное число, большее 5, можно записать в виде суммы трех простых чисел. Например, 21 = 11 + 7 + 3. Эйлер формулировал более сильную гипотезу: «Любое четное число, большее 2, можно представить в виде суммы двух простых чисел». Например, 22 = 19 + 3. Гипотеза Гольдбаха была доказана только в 2013 году перуанским математиком Х. Гельфготтом (род. в 1977 г.), а вот её вариация, предложенная Эйлером, к настоящему моменту ещё не доказана.

[1] В настоящее время существуют и другие способы «отсеивания» составных чисел. Например, в 1934 г. индийский студент Сундарам предложил похожий алгоритм, известный в математике как «решето Сундарама». Возможно, именно тебе удастся отыскать новый способ нахождения простых чисел, т.к. общая формула для их определения математиками пока не найдена.

В XIX веке изучением простых чисел занимались К. Гаусс, А. Лежандр, П. Л. Чебышев и др. Им удалось установить, как часто встречаются простые числа в больших промежутках.

В настоящее время поиск простых чисел и изучение их свойств активно продолжаются. В 2006 году индийский математик Мани́ндра Аграва́л и двое его студентов получили математические премии Гёделя и Фалкерсона за разработку алгоритма, распознающего, является ли данное число простым. Пока данный алгоритм имеет только теоретическое значение, так как для его реализации недостаточно мощности даже современных суперкомпьютеров.

Задания

1) В древнекитайском сочинении «Математика в девяти книгах» рассмотрены примеры сокращения с помощью НОД числителя и знаменателя для дробей $\frac{339}{189}, \frac{18}{108}, \frac{63}{99}$. *Сократи эти дроби.*

2) Реши задачу из «Математического трактата Чжан Цю-цзяня».

Имеется насыпанная гора с оградой 325 ли. Три человека одновременно ходят вдоль ограды. Один за день проходит 150 ли, другой проходит 120 ли, а третий – 90 ли. Спрашивается, сколько дней и сколько обходов они пройдут, пока не встретятся.

3) Реши задачу Магавиры.

Стоимость 9 лимонов и 7 лесных яблок равна 107. Стоимость 7 лимонов и 9 лесных яблок равна 101. О математик! Быстро назови мне цену лимона и лесного яблока!

4) В 1808 г. французский математик Адриен Мари Лежандр высказал гипотезу: «Между последовательными квадратными числами всегда найдется простое число». Приведи примеры, иллюстрирующие эту гипотезу. Можно ли считать её верной?

5) Числами-близнецами[2] *математики назвали пары простых чисел, отличающихся всего на 2: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19 и др. Гипотеза о простых числах-близнецах утверждает, что таких пар бесконечно много (доказательство этого факта математикам пока неизвестно). Выпиши остальные пары таких чисел, не превышающих 100.*

6) Найди в Интернете список простых чисел и выпиши несколько примеров:

а) пар зеркальных простых чисел, типа 13 и 31;

б) простых чисел-палиндромов, которые одинаково читаются с обеих сторон, например, 131.

Источники

1. Абрамов С. А. Самый знаменитый алгоритм // Квант. – 1985. – №11. – С.44-46.
2. Бараш Л.Ю. Алгоритм AKS проверки чисел на простоту и поиск констант генераторов псевдослучайных чисел // Безопасность информационных технологий. – 2005. – № 2. – С. 27-38.
3. Березкина Э.И. Математика древнего Китая. – М.: Наука, 1980.
4. Володарский А.И. Очерки истории средневековой индийской математики. – М.: Наука, 1977.
5. Выгодский М.Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. – М.: Наука, 1967.
6. Гальперин Г. Просто о простых числах // Квант. — 1987. — № 4. — С. 9–14,38.
7. Гарднер М. Математические досуги. – М.: Мир, 1972.
8. Карпушина Н. Палиндромы и «перевёртыши» среди простых чисел // Наука и жизнь. – 2010. – № 5.
9. Пиковер К. Великая математика. От Пифагора до 57-мерных объектов. 250 основных вех в истории математики. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.
10. Руни Э. История математики. От пирамид до изучения бесконечности. – М.: Кучково поле, 2017.

[2] В этом смысле (3, 5, 7) — числа-тройняшки. Сможешь ли ты найти еще примеры таких троек?