Международная обучающая олимпиада
по математике «Учусь учиться» Л.Г. Петерсон
«Олимпиада Петерсон»

(Март 2021)

3 класс

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ

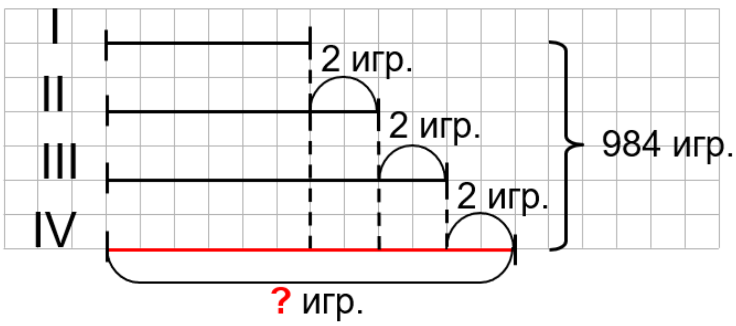
№ 3.1. ПОДАРКИ

У Деда Мороза в кладовой в ряд стоят четыре мешка игрушек. В каждом мешке, кроме самого правого, на 2 игрушки меньше, чем в мешке, стоящем справа от него. Всего в мешках 984 игрушки. Сколько игрушек в крайнем справа мешке?

Заметка для учителя. Данное задание относится к алгебраической линии Олимпиадной математики, направлению «От чисел к буквам».

Обратите внимание, что такое задание можно решать методами более старших классов, а именно с помощью введения переменной и составления уравнения. Однако мы предполагаем от детей более технически простое решение с использованием **схемы**. Именно поэтому схема является необходимой частью решения данной задачи, и при ее отсутствии суммарный балл за задачу снижается (даже при в остальном верном решении).

<u>Схема (1 вариант):</u>



<u>Схема (2 вариант):</u>

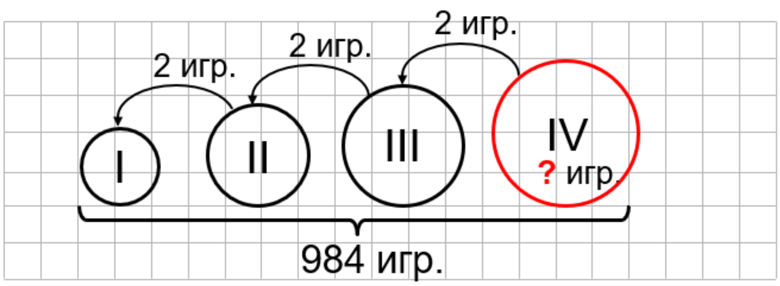
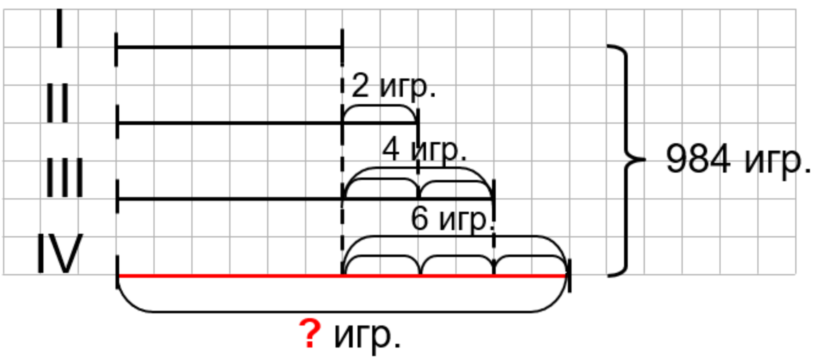


Схема (3 вариант):



Решение (1 способ):

1) 2 + (2 + 2) + (2 + 2 + 2) = 2 + 2 · 2 + 2 · 3 = 2 · 6 = 12 (игр.) – нужно достать (все разницы);

2) 984 – 12 = 972 (игр.) – как в четырёх I мешках; (четырежды в I мешке;)

3) 972 : 4 = 243 (игр.) – в I мешке;

4) 243 + (2 + 2 + 2) = 243 + 2 · 3 = 249 (игр.) – в крайнем справа мешке.

Решение (2 способ):

1) 2 + (2 + 2) + (2 + 2 + 2) = 2 + 2 · 2 + 2 · 3 = 2 · 6 = 12 (игр.) – нужно добавить (все разницы);

2) 984 + 12 = 996 (игр.) – как в четырёх IV мешках; (четырежды в IV мешке;)

3) 996 : 4 = 249 (игр.) – в крайнем справа мешке.

Решение (3 способ):

1) I + IV = II + III – видно по схеме;

2) 984 : 2 = 492 (игр.) – в I и IV мешках вместе (или во II и III);

3) 492 + (2 + 2 + 2) = 498 (игр.) – дважды в IV мешке;

4) 498 : 2 = 249 (игр.) – в крайнем справа мешке.

Примечание. *Для данного способа решения есть и другие (более сложные) варианты последних нескольких действий. Приведем их.*

3) 492 – (2 + 2 + 2) = 486 (игр.) – дважды в I мешке;

4) 486 : 2 = 243 (игр.) – в I мешке;

5) 243 + (2 + 2 + 2) = 249 (игр.) – в крайнем справа мешке.

3) 492 + 2 = 494 (игр.) – дважды в III мешке;

4) 494 : 2 = 247 (игр.) – в III мешке.

5) 247 + 2 = 249 (игр.) – в крайнем справа мешке.

3) 492 – 2 = 490 (игр.) – дважды во II мешке;

4) 490 : 2 = 245 (игр.) – во II мешке.

5) 247 + (2 + 2) = 249 (игр.) – в крайнем справа мешке.

<u>Ответ:</u> 249 игрушек.

<u>Критерии оценки выполнения работы:</u>

1 балл	**Только верный ответ** (249 игрушек).
2 балла	Верная схема, но **неверно выполнено первое действие (сравнение)** (например, 2 + 2 + 2 **= 6** вместо 2 + 2 · 2 + 2 · 3 **= 12** или 2 + 4 + 6 **= 12**).
3 балла	Верная схема и **первое** действие (верно выполнено **сравнение**, т. е. вычислена сумма разниц игрушек ИЛИ замечено, что I + IV = II + III). Если схемы нет, то 1 балл.
4 балла	Верная схема и **два** действия (верно выполнено **уравнивание**, т. е. найдено количество игрушек **в нескольких одинаковых мешках** (например, четырежды в I мешке)). Если схемы нет, то 2 балла.
5 баллов	Верно сделано сравнение и уравнивание, но найдено число игрушек **в каком-то другом мешке**, а не в четвёртом. Если схемы нет, то 3 балла.
6 баллов	Полное решение **с одной арифметической ошибкой** или с ошибкой на внимание, при этом ход решения задачи верный. Если схемы нет, то 4 балла.
7 баллов	**Полное верное решение**: схема, решение, ответ. Если схемы нет, то 5 баллов.

Примечание 1. *Ещё раз обращаем внимание, что при отсутствии верной схемы в пунктах 3 – 7 итоговый балл снижается на 2.*

Примечание 2. *При записи решения этой и последующих задач разрешается объединять несколько действий в одно. Например, следующая запись в первом решении:*

984 – 2 – (2 + 2) – (2 + 2 + 2) = 972 (игр.) – четырежды в I мешке;

будет соответствовать критерию в ***4 балла*** *(при наличии верной схемы).*

Однако, на разборе учащемуся желательно указать, что решение будет более понятным, а вычисления будет легче проверять, если задачу решать по действиям с пояснениями.

Примечание 3. *Любое из предложенных решений можно переписать с помощью уравнения. Рассмотрим на примере способа 1.*

Введем обозначения:

x (игр.) – в самом левом (I) мешке;
x + 2 (игр.) – во II мешке;
x + 2 + 2 (игр.) – в III мешке;
x + 2 + 2 + 2 (игр.) – в IV мешке.
1) Составим уравнение:

x + (x + 2) + (x + 2 + 2) + (x + 2 + 2 + 2) = 984 *(критерий в 3 балла)*
x · 4 + 12 = 984
x · 4 = 984 – 12
x · 4 = 972 *(критерий в 4 балла)*
x = 972 : 4
x = 243 (игр.) – в I мешке. *(критерий в 5 баллов)*

2) 243 + 2 + 2 + 2 = 249 (игр.) – в самом правом мешке.

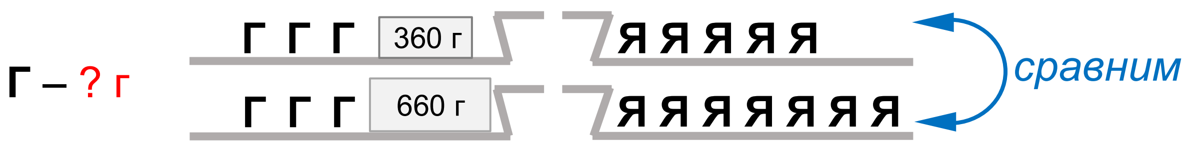
№ 3.2. КОРЗИНКА ФРУКТОВ

Три груши весят на 360 г меньше, чем пять яблок, и на 660 г меньше, чем семь яблок. Сколько весит груша?

Заметка для учителя. Данное задание также относится к алгебраической линии Олимпиадной математики, направлению «От чисел к буквам».

Такое задание можно решать методами более старших классов, а именно с помощью введения переменной и составления системы уравнений. Однако мы предполагаем от детей более технически простое решение с использованием **схемы**. Именно поэтому схема является необходимой частью решения данной задачи, и при ее отсутствии суммарный балл за задачу снижается (даже при в остальном верном решении).

Схема (рисунок):



Решение:

Часть А (узнаём массу яблока).

1 способ:

I и II весы находятся в равновесии. Сравним массы на этих весах.

1) Масса на левой чаше II весов на 660 – 360 = 300 г больше массы на левой чаше I весов.

2) Масса на правой чаше II весов на массу двух яблок больше массы на правой чаше I весов.

⇒ Масса двух яблок равна 300 г.

3) 300 : 2 = 150 (г) – масса одного яблока.

Форма записи (1 способ):

3Г + 360 = 5Я
3Г + 660 = 7Я

1) Сравниваем два равенства (или массы на весах). Получаем:

(3Г + 660) – (3Г + 360) = 7Я – 5Я

3Г + 660 – 3Г – 360 = 2Я

300 = 2Я ⇒ Масса двух яблок 300 г.

3) 300 : 2 = 150 (г) – масса яблока.

2 способ:

Из первой части схемы можно понять, что если заменить 5 яблок на 3 груши и 360 г, то весы останутся в равновесии. Применим это во второй части схемы:

Теперь уберем по 3 груши с обеих чаш. Получится:

1) 660 – 360 = 300 (г) – масса двух яблок;
2) 300 : 2 = 150 (г) – масса яблока.

Часть Б (узнаём массу груши).

1 способ:

1) 150 · 5 = 750 (г) – масса пяти яблок;
2) 750 – 360 = 390 (г) – масса трёх груш;
3) 390 : 3 = 130 (г) – масса груши.

2 способ:

1) 150 · 7 = 1050 (г) – масса семи яблок;
2) 1050 – 660 = 390 (г) – масса трёх груш;
3) 390 : 3 = 130 (г) – масса груши.

Ответ: 130 г масса груши.

Критерии оценки выполнения работы:

1 балл	Только **верный ответ** (130 г) **ИЛИ** только **верно заполненная схема.**
2 балла	Только **верный ответ И схема**.
3 балла	Верная **схема**, **ответ** и идея **сравнения** (масс на разных весах или отрезков на схеме), но масса яблока найдена неверно. Если нет схемы, то 2 балла.
4 балла	Верная схема, ответ, и верно выполнена только **часть Б** (не написано, как найдена масса яблока – 150 г). Если нет схемы, то 3 балла.
5 баллов	Верная схема, а также верно выполнена только **часть А** (найдена масса яблока, а не груши). Если нет схемы, то 4 балла.
6 баллов	Полное решение **с одной арифметической ошибкой** или ошибкой на внимание при верном ходе решения. Если нет схемы, то 5 баллов.
7 баллов	**Полное решение** без ошибок. Если нет схемы, то 6 баллов.

Примечание 1. *Ещё раз обращаем внимание, что при отсутствии верно заполненной схемы в пунктах 2 – 7 итоговый балл снижается на 1.*

Примечание 2. *Существует решение, которое позволяет обойти вычисление массы яблока. Для него работают только критерии на 1, 2, 3, 6 и 7 баллов. Приведём его.*

Сначала уравняем количество яблок на весах:

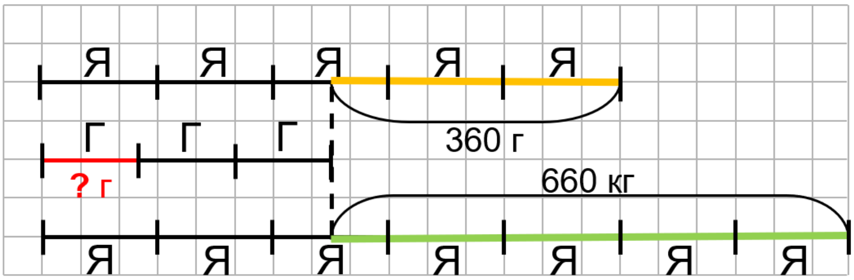
$3Г + 360 = 5Я \quad \Rightarrow \quad (3Г + 360) \cdot 7 = 35Я \quad \Rightarrow \quad 21Г + 2520 = 35Я$

$3Г + 660 = 7Я \quad \Rightarrow \quad (3Г + 660) \cdot 5 = 35Я \quad \Rightarrow \quad 15Г + 3300 = 35Я$

Приравняем теперь левые части равенств:

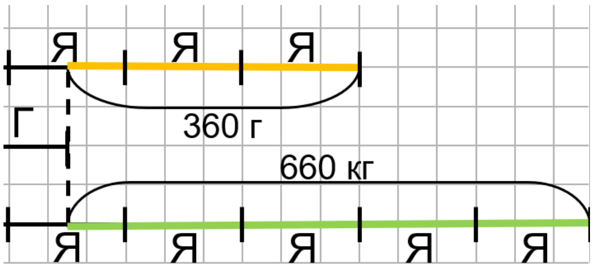
$21Г + 2520 = 15Г + 3300$
$6Г = 3300 – 2520$
$6Г = 780$
$Г = 130$ *(г)*

Примечание 3*. При разборе задач можно показать детям другой вариант схемы:*



Для этой схемы можно показать такой способ рассуждения в части А.

Рассмотрим данную часть схемы:



660 – 360 = 300 (г) – масса двух яблок;
300 : 2 = 150 (г) – масса яблока.

№ 3.3. СПОРТИВНЫЙ ПРОГНОЗ

Об итогах футбольного матча между командами «Ливер» и «Пуля» было сделано 3 прогноза: «Матч завершится вничью», «Будет забито больше трех голов», «Голы забьют обе команды». После матча оказалось, что был верен только третий прогноз. Напиши, какой счёт зрители могли увидеть на табло. Свой ответ объясни.

Заметка для учителя. Данное задание относится к логической линии Олимпиадной математики, направлению «Математическая логика». Также при решении применяются методы из направления «Комбинаторика».

Решение данной задачи основывается на представлении об истинных и ложных высказываниях, их отрицаниях и методе (полного) перебора вариантов.

Так как решение данной задачи, в отличие от остальных, требует большого количества текстовых объяснений, самопроверка учащимися будет труднее. Поэтому нужно быть готовым помочь школьникам выделить «ключевые» части в их решениях.

Решение:
1 способ:
Так как после матча был верен только **третий** прогноз, тогда представим все прогнозы в форме **верного** высказывания:
1. Ничьей **не будет**, какая-то команда выиграет.
2. Будет забито **не более трёх** голов.
3. Голы забьют **обе** команды.

1) Всего забито не больше трёх голов ⇒ подходят варианты счёта:

0:0 0:1 0:2 0:3 1:0 1:1 1:2 2:0 2:1 3:0

(сначала перечислены варианты, когда первая команда забила 0 голов, потом – когда 1 гол, потом – когда 2 гола и в конце – когда 3 гола; перебираем числа «в порядке возрастания»)

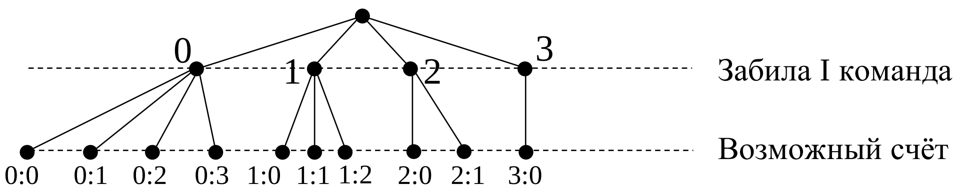
2) Голы забили обе команды, поэтому убираем все варианты с 0:

1:1 1:2 2:1

3) Ничьей не было. Остаются варианты:

1:2 2:1

Форма записи (1 способ):
Представить перебор (в этом и других способах) можно в виде **дерева вариантов**:



2 способ:
Так как после матча был верен только **третий** прогноз, тогда представим все прогнозы в форме **верного** высказывания:
1. Ничьей не будет, какая-то команда выиграет.
2. Будет забито **не более трёх** голов.
3. Голы забьют обе команды.

Если голов не больше трёх, то их всего может быть 0, 1, 2, или 3.
По составу числа счёт может быть:

0 : 0 – не подходит, т. к. не выполняются условия 1 и 3. (кратко будем записывать так: Н.в.(1,3))

0 : 0 Н.в. (1, 3)

0 : 1 Н.в. (3) 1 : 0 Н.в. (3)

0 : 2 Н.в. (3) 2 : 0 Н.в. (3) 1 : 1 Н.в. (1)

0 : 3 Н.в. (3) 3 : 0 Н.в. (3) 2 : 1 В1 : 2 В

3 способ:

1) Каждая команда забила хотя бы один мяч, при этом всего было забито не более 3 голов. Такое может быть только при вариантах счёта:

1:1 1:2 2:1

2) Ничьей не было. Остаются варианты:

1:2 2:1

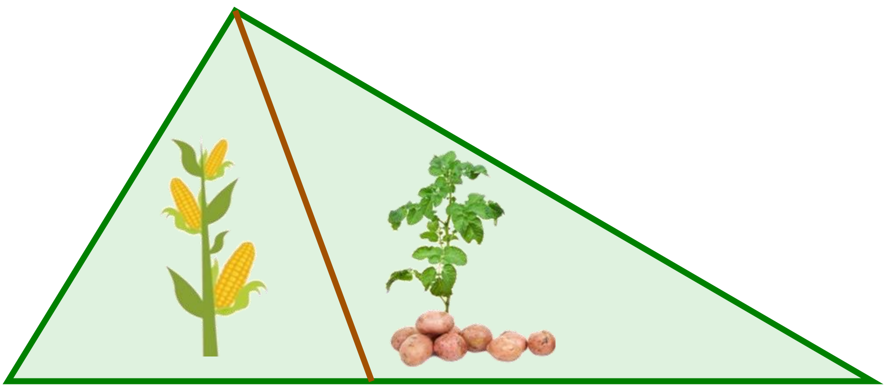
Ответ: счёт 2 : 1 или 1 : 2.

Критерии оценки выполнения работы:

1 балл	**Только верный ответ** (одна команда забила 2 мяча, а другая – 1).
2 балла	Только верно построено **отрицание** первого или второго прогноза.
3 балла	Верно построены **отрицания первого и второго прогнозов**.
4 балла	Верно построены отрицания. Правильно **описаны случаи**, которые нужно перебрать (например, когда было 0, 1, 2, 3 гола), но перебора нет.
5 баллов	Верно построены отрицания. Правильно описаны случаи, которые нужно перебрать (например, когда было 0, 1, 2, 3 гола), но разобраны **не все варианты счёта**.
6 баллов	Верное решение, но **потерян один из вариантов счёта (2:1 или 1:2).**
7 баллов	**Полное решение**, оба варианта счёта.

№ 3.4. ДОРОЖКА

Фермер купил два треугольных участка земли, обнесённых одним забором, длина которого 250 м. Периметр участка с картофелем равен 180 м, а периметр участка с кукурузой – 150 м. Какой длины дорожка, разделяющая эти два участка?



Заметка для учителя. Данное задание относится к геометрической линии Олимпиадной математики, направлению «Геометрические неравенства».

Решение задания основывается на общем математическом методе, который называется *подсчетом двумя способами* (*двойным подсчетом*). Так, в задаче 330 м – это, с одной стороны, сумма периметров участков, а с другой – сумма длины внешнего периметра и удвоенной длины дорожки.

Решение:

В сумме периметров участков дважды учитывается длина коричневого отрезка – дорожки между участками, которой нет при нахождении длины внешнего забора. Поэтому:

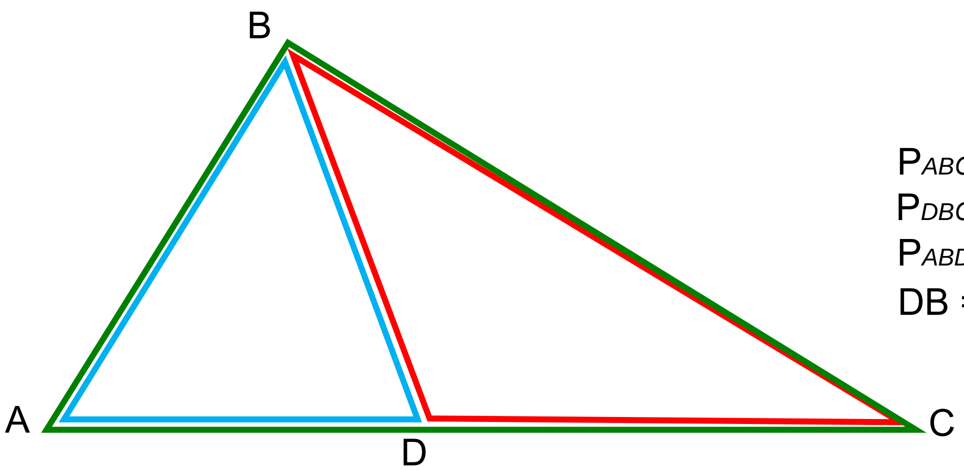
1) 150 + 180 = 330 (м) – сумма периметров двух участков.
2) 330 – 250 = 80 (м) – удвоенная длина дорожки;
3) 80 : 2 = 40 (м) – длина дорожки.

Ответ: 40 м.

Критерии оценки выполнения работы:

1 балл	**Только верный ответ** (в том числе найденный через запись конкретных длин сторон).
2 балла	Найдена **сумма периметров** участков (первое действие).
3 балла	–
4 балла	Верный ход решения, но **не учтено** (не показано на рисунке и не оговорено), что при сложении периметров длина дорожки суммируется дважды. Нет последнего действия. Получен неверный ответ – 80 м.
5 баллов	–
6 баллов	Полное решение **с одной арифметической ошибкой** или ошибкой на внимание.
7 баллов	**Полное верное решение.**

Примечание. *Для удобства объяснений можно изобразить такую схему (рисунок):*



$P_{ABC} = 250$ м
$P_{DBC} = 180$ м
$P_{ABD} = 150$ м
DB = **? м**