



Международная обучающая математическая олимпиада «Учусь учиться» Л.Г. Петерсон ТЕСТ–ДРАЙВ



14 – 15 апреля 2020 года

ЗАДАЧА 2. «ХИТРАЯ ЗАДАЧА»

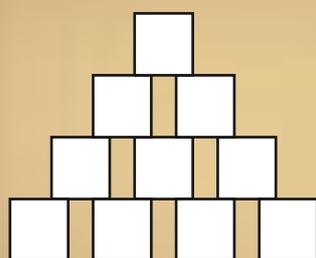
Подробный разбор решения задачи

УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

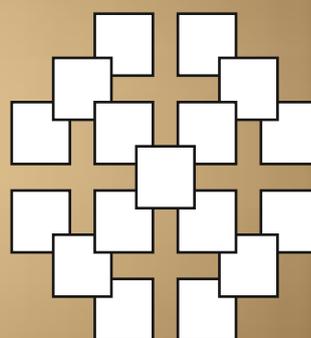
На следующий год царь Сахарного царства, Рафинадного государства Рафинад V велел мастерам построить новую сахарную башню из белоснежных блоков-кубиков одинакового размера. Чертёж будущей башни Рафинад V, как и в прошлый раз, начертил собственноручно. Высочайшим указом он повелел строителям экономно расходовать драгоценный материал и без особой нужды не чинить урон государственной казне. Какое наименьшее количество кубиков достаточно взять мастерам, чтобы построить эту башню? (Письменное доказательство того, что именно это число кубиков является наименьшим, можно не приводить). Нарисуй вид сверху каждого яруса башни. Проведи эксперимент.



Вид спереди и сбоку

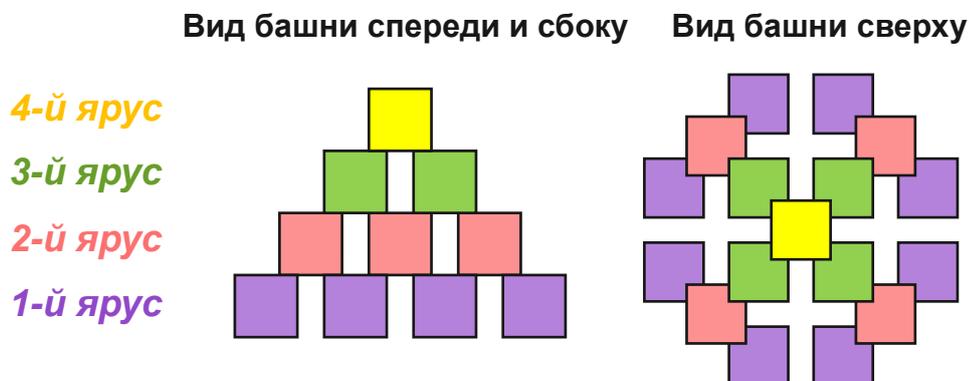


Вид сверху

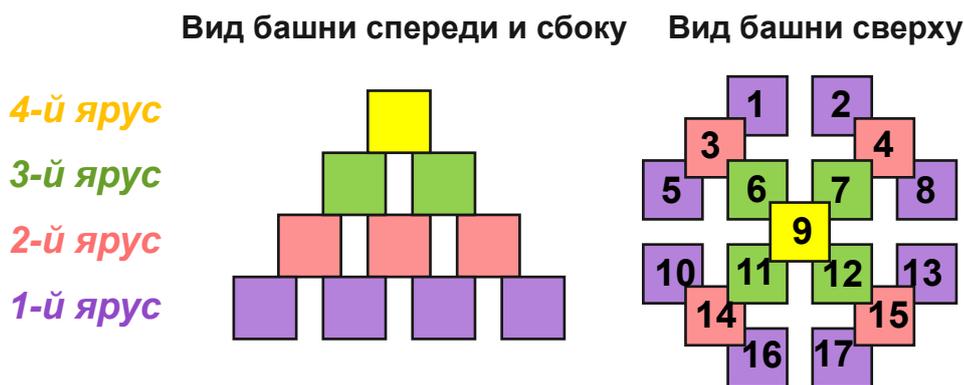


РЕШЕНИЕ

Для начала определим количество уровней башни. Их на виде спереди и сбоку четыре. Для удобства выделим каждый ярус цветом.



Если посчитать все кубики на виде сверху, получим 17 кубиков: 8 – в первом ярусе, 4 – во втором, 4 – в третьем и 1 – в четвёртом.



Однако в постройке башни будет использоваться ещё как минимум один кубик, который не виден, если смотреть на башню сверху, но он показан на виде спереди и сбоку. Это центральный кубик второго яруса (кубик номер 18), который располагается строго под кубиком 9 в четвёртом ярусе и потому не виден сверху (фото 1 – 6).

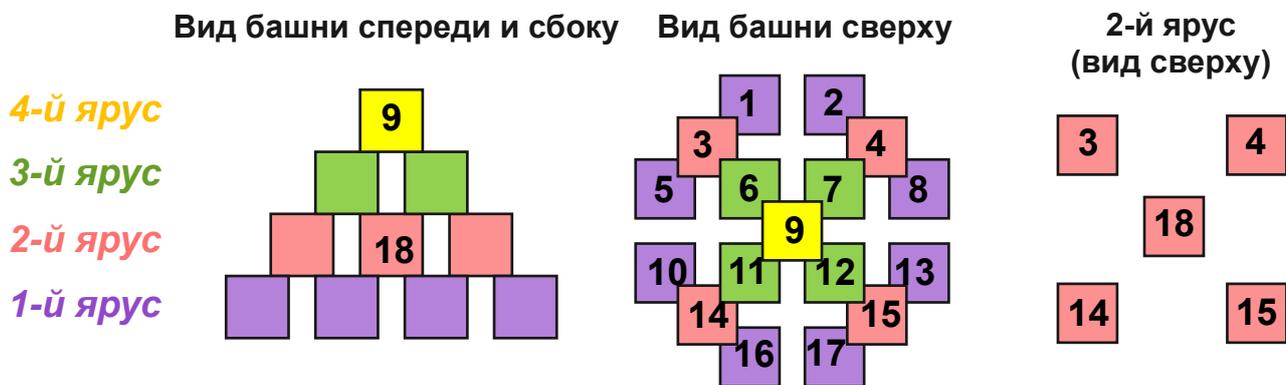


Фото 1-3. Второй, третий и четвёртый ярусы башни (общий вид, вид спереди, вид сверху)

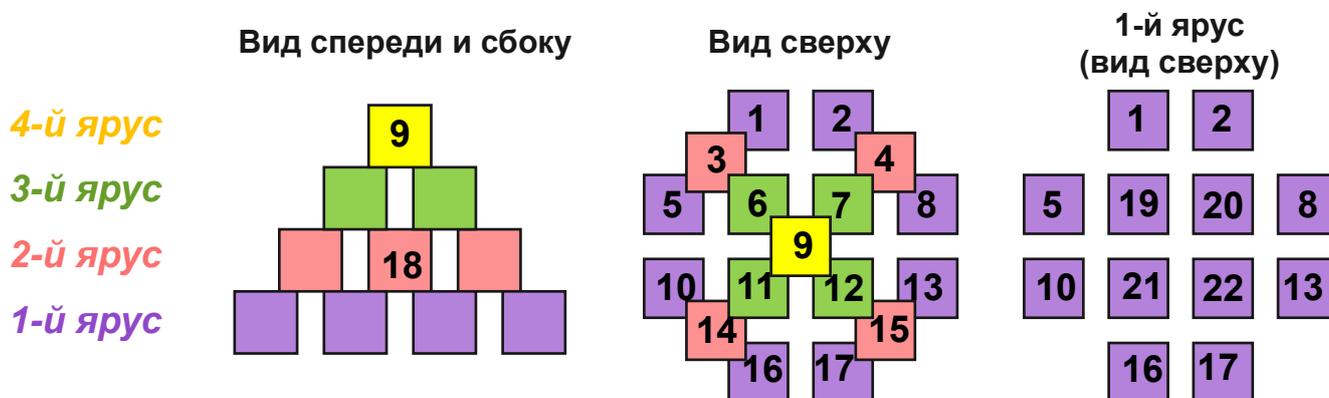


Фото 4-6. Второй и третий ярусы башни
(общий вид, вид спереди, вид сверху)

В результате, второй ярус башни будет выглядеть следующим образом:



Учитывая предыдущие выводы, попробуем предположить, что в первом ярусе строго под кубиками 3-го яруса (кубики 6, 7, 11, 12) могут располагаться четыре центральных кубика, которые нельзя увидеть ни на плане сверху, ни на плане спереди или сбоку. При этом общее количество кубиков в башне будет 22, а нижний, первый ярус башни будет состоять из 12 кубиков и выглядеть так:



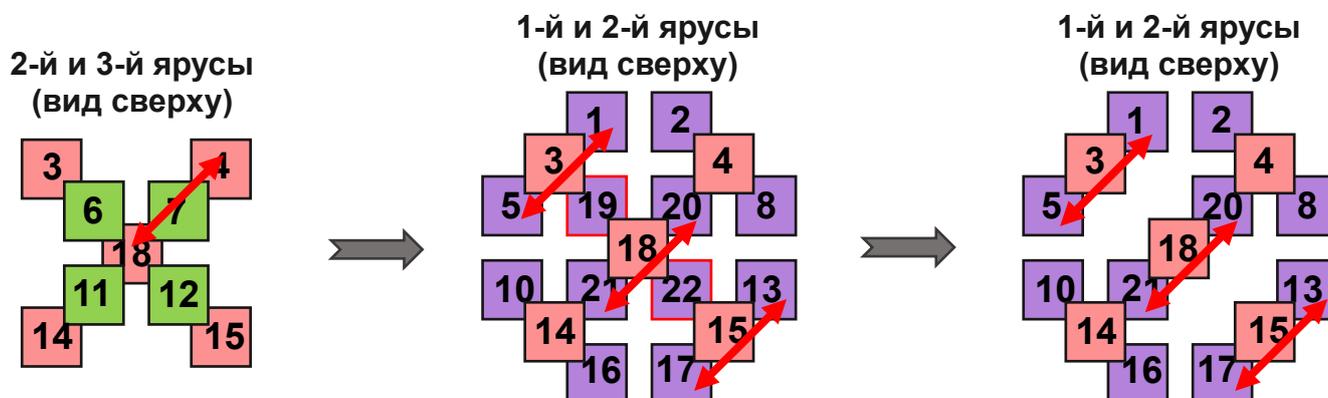
Попробуем определить, можно ли уменьшить количество кубков в первом ярусе.

Используя изображение 2-го и 3-го ярусов (вид сверху) можно заметить, что один кубик вышерасположенного яруса может опираться на два расположенных по диагонали кубика нижнего яруса (например, кубик 7 стоит на кубиках 4 и 18, а кубик 6 – на кубиках 3 и 18). Значит, некоторые кубики второго яруса могут стоять не на трёх, а на двух кубиках первого яруса. Рассмотрим возможные варианты.

Вариант 1.

Кубик 2 яруса	ОПИРАЕТСЯ НА	Кубики 1 яруса
3		1 и 5
4		2, 8 и 20
14		10, 16 и 21
15		13 и 17
18		20 и 21

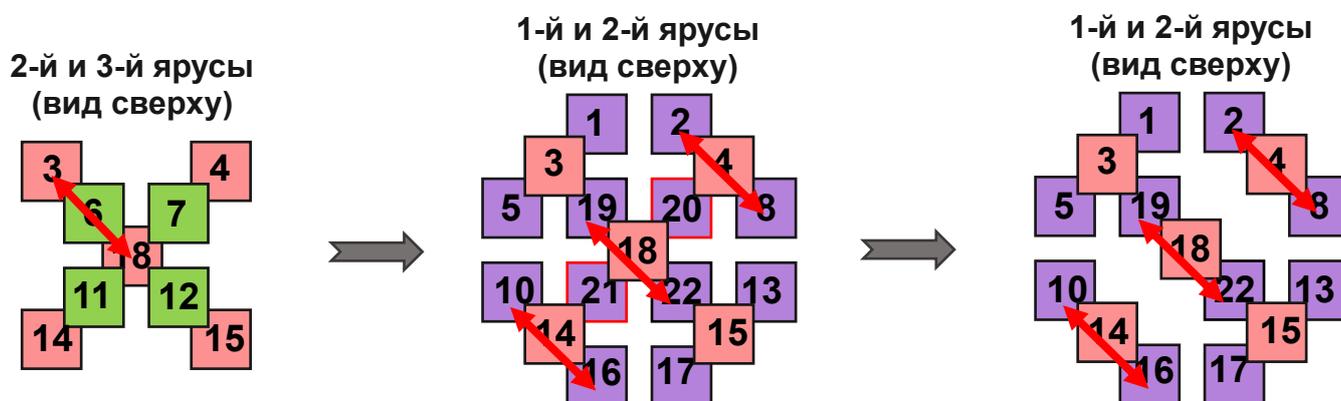
В этом случае кубики 19 и 22 можно убрать из первого яруса, и общее количество кубиков в этом ярусе будет 12.



Вариант 2.

Кубик 2 яруса	ОПИРАЕТСЯ НА	Кубики 1 яруса
3		1, 5 и 19
4		2 и 8
14		10 и 16
15		13, 17 и 22
18		19 и 22

В этом случае кубики 20 и 21 первого яруса можно убрать. Однако общее количество кубиков и при таком их расположении будет 12.



Ещё уменьшить число кубиков в этом ярусе, например, убрав один из трёх опорных кубиков, нельзя, так как кубики 1, 2, 5, 8, 10, 13, 16 и 17 изображены на виде башни сверху, а кубики 19 и 22, 20 и 21 попарно обеспечивают опору для кубика 18 (фото 7, 8). Поэтому 12 кубиков – это наименьшее число кубиков в нижнем, первом ярусе.

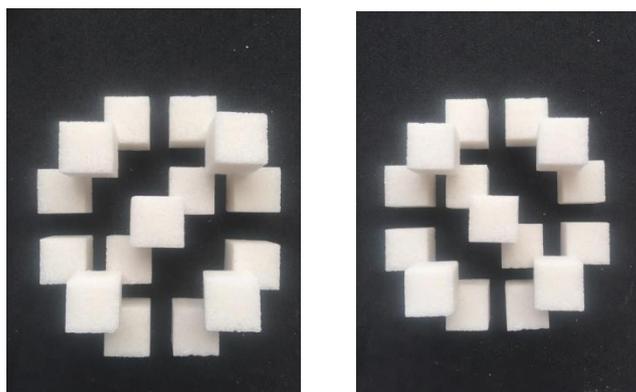
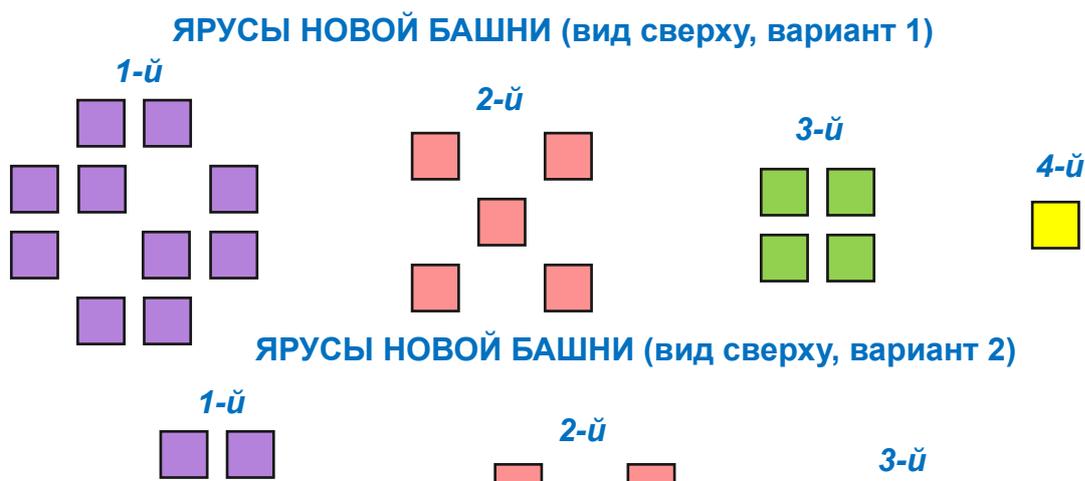


Фото 7, 8. Первый и второй ярусы башни. Вид сверху (вариант 1 и 2).

Рисуем ярусы, считаем кубики

Определив наименьшее число кубиков в первом ярусе башни, можно вычислить наименьшее количество кубиков для всей башни, представив раскладку кубиков по уровням:



Или:

$$10 + 5 + 4 + 1 = 20 \text{ (кубиков)}$$

Таким образом, 20 кубиков – это наименьшее количество кубиков, которое достаточно взять мастерам, чтобы построить башню по указанному в задаче чертежу.

Ответ: достаточно взять 20 кубиков.

Фото Новой башни, построенной из 20 кубиков:

общий вид



вид спереди



вид сверху



Критерии оценки выполнения работы:

7 баллов	Ответ: достаточно взять 20 кубиков. Правильно нарисованы все четыре яруса.
6 баллов	Ответ: достаточно взять 21 кубик. Есть рисунок. В 1-м ярусе есть 3 центральных кубика.
5 баллов	Ответ: достаточно взять 22 кубика. Есть рисунок. В 1-м ярусе есть 4 центральных кубика, 2-й ярус изображён правильно.
4 балла	Ответ: достаточно взять 21 кубик. Есть рисунок. В 1-м ярусе есть 4 центральных кубика, во 2-м ярусе нет центрального кубика.
3 балла	Ответ: достаточно взять 20 кубиков. Нет рисунка ярусов.
2 балла	Ответ: достаточно взять 22 кубика. Нет рисунка ярусов.
1 балл	Ответ: достаточно взять 17 кубиков. Нет рисунка ярусов. Или Ответ: достаточно взять 18 кубиков. Нет рисунка ярусов.