

Международная обучающая олимпиада по математике «Учусь учиться» Л.Г. Петерсон



«Олимпиада Петерсон»

(Апрель 2020)

4 класс

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ

(Продолжительность работы \approx 40 минут, 4 задачи)

№ 4.1. В ПОИСКАХ ЧИСЛА

На какое наименьшее натуральное число нужно умножить 126 984, чтобы получилось число, которое записывается одними восьмёрками?



Заметка для учителя. Данное задание относится к **арифметической линии** Олимпиадной математики, направлению «Числа и их свойства».

Вопрос задания («на какое наименьшее...») подразумевает, что в решении будет две ключевых части: **пример** (в данном случае, число, при умножении на которое получится число из одних восьмёрок) и **оценка** (доказательство, что меньше такое число подобрать не получится).

Решение (1 способ):

Чтобы найти *наименьшее* число, воспользуемся **методом полного перебора**. Будем умножать на все числа в порядке возрастания, начиная с единицы:

$126\ 984 \cdot 1 = \dots\dots 4$ $4 \neq 8 \Rightarrow 1$ не подходит (даже последняя цифра произведения – не восьмёрка);

$126\ 984 \cdot 2 = \dots\dots 68$ $6 \neq 8 \Rightarrow 2$ не подходит;

$126\ 984 \cdot 3 = \dots\dots 2$ $2 \neq 8 \Rightarrow 3$ не подходит;

$126\ 984 \cdot 4 = \dots\dots 6$ $6 \neq 8 \Rightarrow 4$ не подходит;

$126\ 984 \cdot 5 = \dots\dots 0$ $0 \neq 8 \Rightarrow 5$ не подходит;

$126\ 984 \cdot 6 = \dots\dots 4$ $4 \neq 8 \Rightarrow 6$ не подходит;

$126\ 984 \cdot 7 = 888\ 888$ произведение записано восьмёрками $\Rightarrow 7$ подходит.

Форма записи (1 способ):

Чтобы найти *наименьшее* число, воспользуемся **методом полного перебора**, начиная прибавлять к исходному числу 126 984 до тех пор, пока не получится число из одних восьмёрок:

$126\ 984 + 126\ 984 = 253\ 968$ не подходит;

$253\ 968 + 126\ 984 = 380\ 952$ не подходит;

$380\ 952 + 126\ 984 = 507\ 936$ не подходит;

$507\ 936 + 126\ 984 = 634\ 920$ не подходит;

$634\ 920 + 126\ 984 = 761\ 904$ не подходит;

$761\ 904 + 126\ 984 = 888\ 888$ произведение записано восьмёрками $\Rightarrow 7$ подходит.

Решение (2 способ):

Запишем ребус в столбик. Неизвестное число обозначим А:

$$\begin{array}{r} \times \quad 1\ 2\ 6\ 9\ 8\ 4 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{А} \\ \hline \qquad \qquad \dots\ 8\ 8\ 8 \end{array}$$

Требуется найти самое меньшее число А, поэтому будем искать среди однозначных.

$4 \cdot A = \dots 8$, следовательно, согласно таблице умножения, А = 2 или 7.

Сначала проверим число 2, т. к. оно меньше, чем 7.

$$\begin{array}{r} \times \quad 1\ 2\ 6\ 9\ 8\ 4 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 2 \\ \hline \qquad \qquad \dots\ 6\ 8 \end{array}$$

Заметим, что уже при умножении разряда десятков в произведении получается не восьмёрка. Значит, этот вариант не подходит.

Проверим 7:

$$\begin{array}{r} \qquad \qquad 1\ 4\ 6\ 5\ 2 \\ \times \quad 1\ 2\ 6\ 9\ 8\ 4 \\ \hline \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 7 \\ \hline \qquad \qquad 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8 \end{array}$$

Результат умножения записан одними восьмёрками, значит, число 7 подходит.

Решение (3 способ):

Чтобы найти наименьший множитель, найдем наименьшее возможное произведение. Воспользуемся методом полного перебора, проверяя числа, которые записываются одними восьмёрками: 888 888, 8 888 888, 88 888 888, ... Проверяем в порядке возрастания, начав с 888 888 (меньше не может быть, ведь $126\ 984 > 88\ 888$, произведение как минимум шестизначное).

$888\ 888 : 126\ 984 = 7$. Подходит.

Примечание. Обращаем внимание, что в данной задаче **необходимо доказать, что ответ наименьший.**

Ответ: на число 7.

Критерии оценки выполнения работы:

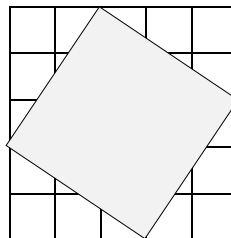
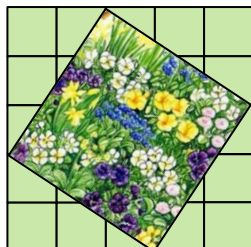
1 балл	Только верный ответ (на число 7) ИЛИ Идея о том, что должно получиться минимум шестизначное число – 888 888 (но ответа нет). ИЛИ Есть только идея, что нужно умножать на число, заканчивающееся на 2 или 7.
	2 балла

3 балла	–
4 балла	Верный ответ и проверка только для 2 и 7 (не объяснен выбор чисел 2 и 7) ИЛИ Перебор с одной ошибкой ИЛИ Выполнено деление 888 888 на 126 984 (не объяснено, почему меньше 6 восьмерок не подходит).
5 баллов	–
6 баллов	–
7 баллов	Полный перебор всех вариантов (за отсутствие варианта с умножением на единицу баллы не снижаются). Ошибок нет* .

*Примечание**. Если хотя бы в одном примере на сложение или умножение (кроме умножения на 2 и 7) допущена арифметическая ошибка, то работа оценивается не более, чем в 4 балла.

№ 4.2. ЦВЕТОЧНАЯ КЛУМБА

На рисунке изображен план газона с квадратной клумбой посередине. Каждая клетка на плане соответствует 1 м^2 на местности. Какова реальная площадь клумбы?



Заметка для учителя. Данное задание относится к [геометрической линии](#) Олимпиадной математики, направлению «Площади».

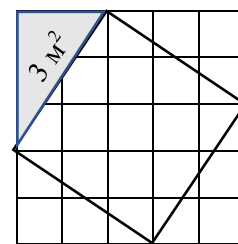
Для решения данной задачи можно использовать два общих подхода (которые работают не только в геометрических задачах): **метод дополнения**, связанный с теорией множеств, и **метод разбиения**.

В данной задаче школьники могут попробовать привести такое «решение»: измерить длину стороны квадрата линейкой, округлить до целого числа (сантиметров или миллиметров) и дать ответ. Действительно, для школьников начальных классов знание о том, что длины сторон фигур могут быть нецелыми, достаточно сложно. Тем не менее, в курсе математики школьники уже наверняка сталкивались с более простыми задачами на вычисление площадей фигур (например, прямоугольников с вырезанными прямоугольными частями), поэтому они имеют возможность применить известный метод в этой нестандартной задаче.

Решение (способ 1):

Воспользуемся **методом дополнения**: вычтем из общей площади газона площадь треугольных частей, не закрытых клумбой.

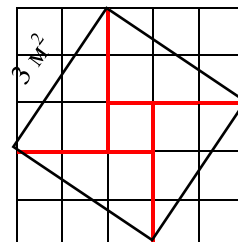
- 1) $5 \cdot 5 = 25$ (м²) – площадь всего газона;
- 2) $(2 \cdot 3) : 2 = 3$ (м²) – площадь одной треугольной части газона;
- 3) $3 \cdot 4 = 12$ (м²) – площадь четырёх треугольных частей газона;
- 4) $25 - 12 = 13$ (м²) – площадь клумбы.



Решение (способ 2):

Воспользуемся **методом разбиения**. Разобьём площадь всего газона на плане на 5 частей: 4 равных прямоугольника и 1 квадрат, равный 1 клетке на плане. При этом каждый из прямоугольников будет состоять из двух равных треугольников: один – это газон, другой – клумба.

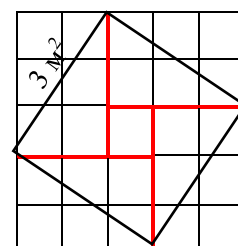
- 1) $(2 \cdot 3) : 2 = 3$ (м²) – площадь одной треугольной части газона или клумбы;
- 2) $3 \cdot 4 = 12$ (м²) – площадь четырёх треугольных частей клумбы на плане или площадь клумбы без центрального квадрата;
- 3) $12 + 1 = 13$ (м²) – площадь клумбы.



Решение (способ 3):

Воспользуемся **методом разбиения**. Разобьём площадь всего парка на плане на 5 частей: 4 равных прямоугольника и 1 квадрат, равный 1 клетке на плане. При этом каждый из прямоугольников будет состоять из двух равных треугольников: один – это газон, другой – клумба.

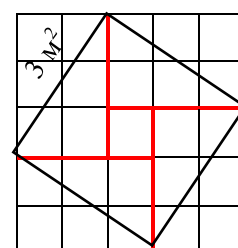
- 1) $2 \cdot 3 = 6$ (м²) – площадь одного прямоугольника;
Клумба занимает ровно 2 прямоугольника и центральный квадрат.
- 2) $6 \cdot 2 = 12$ (м²) – площадь клумбы без центрального квадрата;
- 3) $12 + 1 = 13$ (м²) – площадь клумбы.



Решение (способ 4):

Воспользуемся **методом разбиения**. Разобьём площадь всего парка на плане на 5 частей: 4 равных прямоугольника и 1 квадрат, равный 1 клетке на плане. При этом каждый из прямоугольников будет состоять из двух равных треугольников: один – это газон, другой – клумба.

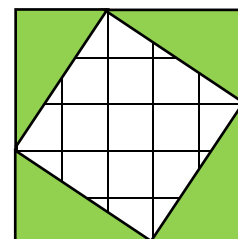
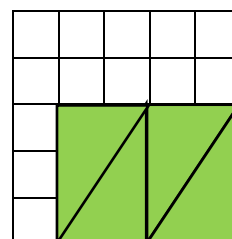
- 1) $5 \cdot 5 = 25$ (м²) – площадь газона;
- 2) $(25 - 1) : 2 = 12$ (м²) – площадь части газона, не закрытой клумбой;
- 3) $12 + 1 = 13$ (м²) – площадь клумбы.



Решение (способ 5):

Воспользуемся **методом «разрежь и составь»**. Вырежем треугольники на плане, которые соответствуют части газона, не закрытой клумбой, и сложим их так, как показано на рисунке:

- 1) $5 \cdot 5 = 25$ (м²) – площадь газона;
- 2) $4 \cdot 3 = 12$ (м²) – площадь части газона, не закрытой клумбой (площадь всех зелёных треугольников вместе);



3) $25 - 12 = 13$ (м²) – площадь клумбы.

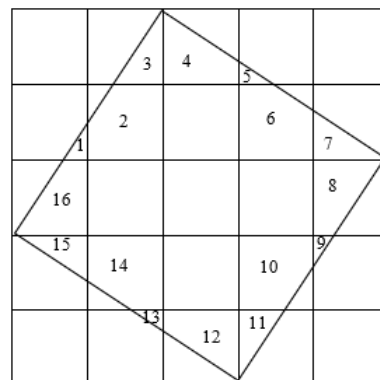
Решение (способ 6):

Площадь клумбы состоит из полных и неполных клеток. Полных клеток 5. Неполные клетки разобьём на пары, из которых можно составить целую клетку.

Пары клеток: 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8, 9 и 10, 11 и 12, 13 и 14, 15 и 16.

1) $16 : 2 = 8$ (м²) – площадь «неполных клеток»;

2) $8 + 5 = 13$ (м²) – площадь клумбы.



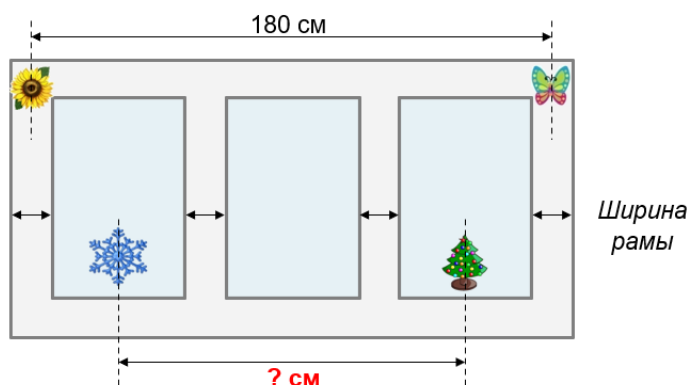
Ответ: 13 м².

Критерии оценки выполнения работы:

1 балл	Только верный ответ (13 м ²).
2 балла	Найдена площадь треугольника или прямоугольника , составленного из двух треугольников.
3 балла	Верное разбиение фигуры на части или идея метода дополнения (площадь клумбы равна разности площади всего газона и площади травы). Дальнейших продвижений нет.
4 балла	–
5 баллов	Для способов 2-4: верный рисунок и пояснения, но в вычислениях не учтена центральная клетка при в целом верном ходе решения.
6 баллов	Полное решение с арифметической ошибкой .
7 баллов	Полное решение: есть рисунок с разбиением на фигуры (в решениях на метод разбиения), вычисления с пояснениями, ответ.

4.3. КАРТИНКИ НА ОКНЕ

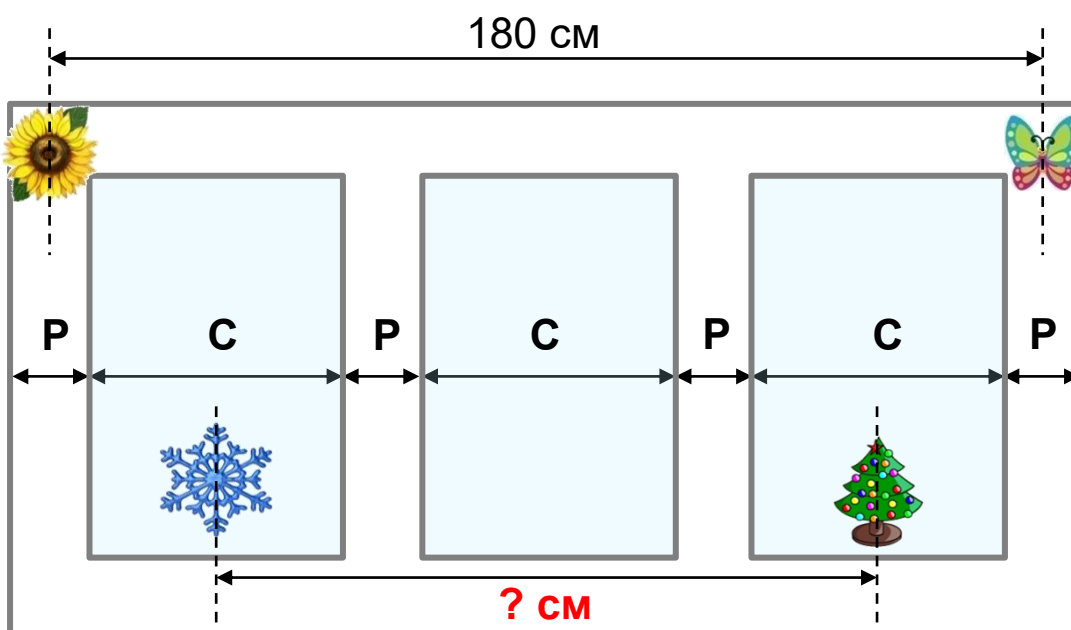
На раму и на стекло, изображенные на рисунке, дети прикрепили картинки. Известно, что расстояние между цветочком и бабочкой составляет 180 см. Чему равно расстояние между снежинкой и ёлочкой? (Ширина рамы везде одинаковая, размер стёкол тоже одинаков.)



Заметка для учителя. Данное задание относится к **геометрической линии** Олимпиадной математики, направлениям «Геометрическое мышление» и «Геометрические неравенства», хотя решение использует и алгебраические мотивы.

Для решения данной задачи можно использовать два общих подхода: подсчет двумя способами (как, например, в 1 способе решения) и параллельный перенос (как, например, в 3 способе).

Решение (1 способ):

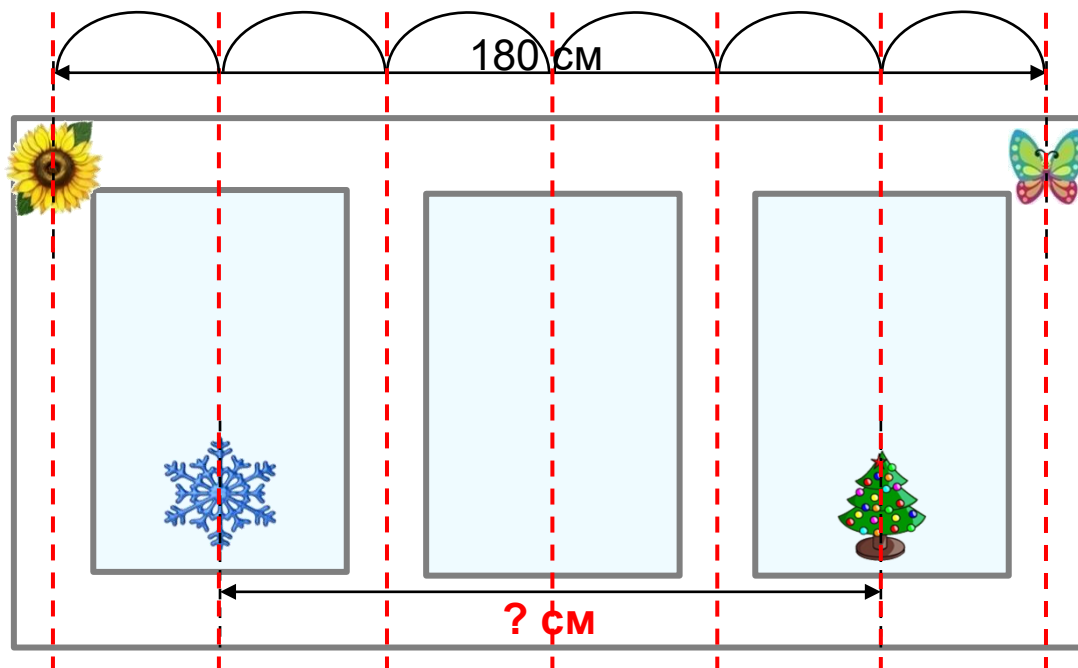


Обозначим ширину рамы P , а ширину стекла C .

- 1) Тогда расстояние между цветком и бабочкой можно записать:
 $\frac{1}{2}P + C + P + C + P + C + \frac{1}{2}P = P \cdot 3 + C \cdot 3 = (P + C) \cdot 3 = 180$ (см)
- 2) $180 : 3 = 60$ (см) – ширина стекла и рамы ($P + C$).
- 3) Расстояние между снежинкой и ёлочкой можно записать:
 $\frac{1}{2}C + P + C + P + \frac{1}{2}C = P \cdot 2 + C \cdot 2 = (P + C) \cdot 2$ (см)
- 4) $60 \cdot 2 = 120$ (см) – расстояние между снежинкой и ёлочкой.

Решение (2 способ):

Разделим расстояние между цветком и бабочкой на 6 равных частей (каждая из таких частей равна половине ширины рамы и половине ширины стекла):



1) $180 : 6 = 30$ (см) – одна часть;

Заметим, что между снежинкой и ёлочкой 4 таких части.

2) $30 \cdot 4 = 120$ (см)

Решение (3 способ):

Мысленно сдвинем и цветок, и бабочку на одно и то же расстояние, равное половине ширины рамы (вправо или влево). При этом расстояние между рисунками не изменится. Обозначим ширину рамы P , а ширину стекла C .

1) $P + P + P + C + C + C = 180$ (см) – расстояние между цветком и бабочкой.

2) $180 : 3 = 60$ (см) – ширина стекла и рамы ($P + C$).

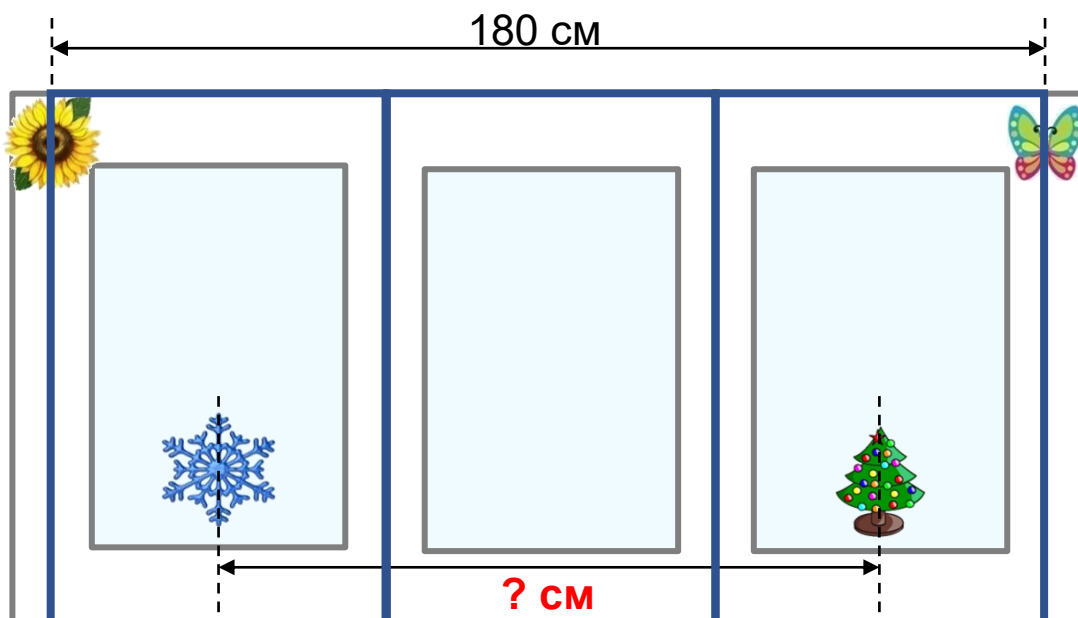
Снежинку и ёлочку также можно сдвинуть на половину ширины стекла (вправо или влево). Получим:

3) $P + P + C + C = (P + C) \cdot 2$ (см) – расстояние между снежинкой и ёлочкой.

4) $60 \cdot 2 = 120$ (см)

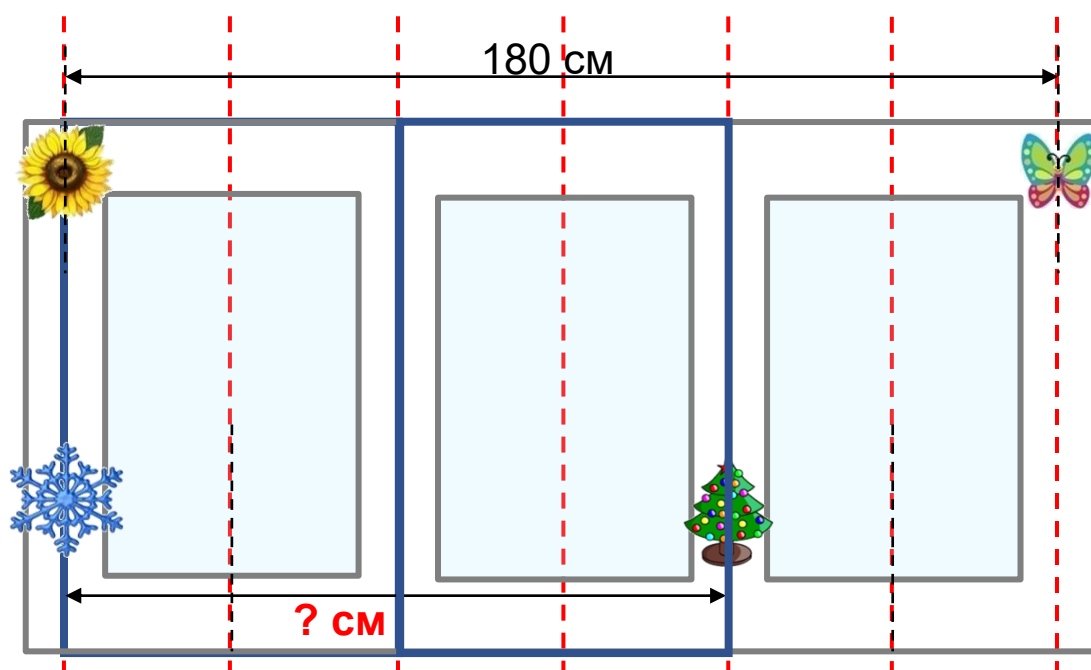
Решение (4 способ):

Выделим на рисунке три одинаковых фрагмента, состоящих из стекла и рамки шириной в половину рамки:



1) $180 : 3 = 60$ (см) – ширина фрагмента.

Сдвинем снежинку и ёлочку на половину ширины этого фрагмента (вправо или влево). При этом расстояние между рисунками не изменится. Получим два фрагмента:



2) $60 \cdot 2 = 120$ (см)

Ответ: 120 см.

Критерии оценки выполнения работы:

1 балл	Только верный ответ (120 см)
2 балла	Верный ответ получен подбором конкретных значений ширины рамы и стекла.

3 балла	Замечено, что $180 \text{ см} = P \cdot 3 + C \cdot 3$ (в т. ч. замечены 6 равных частей или 3 равных фрагмента)
4 балла	Установлено, что $P + C = 60$ (см) (в т. ч. ширина фрагмента = 60 см) ИЛИ 1 часть – 30 см
5 баллов	То же, и замечено, что нужно найти $P \cdot 2 + C \cdot 2$ (в т. ч. замечены 4 равных части)
6 баллов	Полное решение, но есть арифметическая ошибка .
7 баллов	Полное верное решение.

№ 4.4. ХУДОЖНИКИ

Ася, Маша и Галя нарисовали круг, квадрат и треугольник (каждая девочка нарисовала только одну фигуру). Ася сказала, что Галя нарисовала круг. Маша сказала, что Ася нарисовала квадрат. Галя сказала: «Я нарисовала квадрат». Кто что нарисовал, если только одна из девочек солгала?

Заметка для учителя. Данное задание относится к **логической линии** Олимпиадной математики, направлению «Математическая логика».

Формулировка задания («кто что нарисовал...») подразумевает, что будут найдены все варианты и доказано, что других быть не может. Именно поэтому требуется словесное решение и недостаточно изобразить только таблицу, в которой плюсами и минусами указано, какую фигуру могла и не могла нарисовать каждая девочка.

Доказательство можно провести с использованием **метода (полного) перебора**.

Решение (способ 1):

Предположим, что солгала Ася, тогда Галя и Маша сказали правду. По их высказываниям, Галя и Ася нарисовали квадрат. Но двое не могли нарисовать одну фигуру. Значит, Ася не солгала, а сказала правду.

	круг	квадрат	треугольник
Ася		+	
Маша			
Галя	—	+	

Предположим, что солгала Маша, тогда Галя и Ася сказали правду. По их высказываниям, Галя нарисовала и круг, и квадрат. Но Галя не могла нарисовать две разные фигуры. Значит, Маша не солгала, а сказала правду.

	круг	квадрат	треугольник
Ася	+	—	
Маша			
Галя	+		

Если Ася и Маша не солгали, значит, солгала Галя. Узнаем тогда, кто какую фигуру нарисовал.

Из слов Аси, которая сказала правду, можно узнать, что Галя нарисовала круг, а из слов Маши – что Ася нарисовала квадрат. Оставшуюся фигуру – треугольник – нарисовала Маша.

	круг	квадрат	треугольник
Ася	—	+	—
Маша	—	—	+
Галя	+	—	—

Примечание. В первом способе решения, когда уже определено, кто что нарисовал, не нужно проверять, что этот случай подходит (так как все остальные случаи уже исключены). Но можно добавить в решение фразу: «Этот случай подходит, так как Галя лжёт (говорит, что нарисовала квадрат, а на самом деле нарисовала круг)».

Проверка не является обязательной частью решения, но может позволить найти у себя ошибку – например, если получилось бы, что и этот случай не подходит, то где-то в рассуждениях явно закралась неточность.

Решение (способ 2):

Заметим, что высказывание Аси противоречит Галиному (т. к. каждая девочка нарисовала только одну фигуру):

	круг	квадрат	треугольник
Ася			
Маша			
Галя	+	+	

Высказывание Гали противоречит словам Маши (т. к. каждую фигуру нарисовала только одна девочка):

	круг	квадрат	треугольник
Ася		+	
Маша			
Галя		+	

Так как солгала только одна девочка, то это Галя, потому что её высказывание противоречит словам двух других девочек. Галя солгала, значит, она не рисовала квадрат.

Галя солгала, значит, Маша и Ася сказали правду. Поэтому Галя, как утверждает Ася, нарисовала круг, а Ася, по словам Маши, нарисовала квадрат.

Если Галя нарисовала круг, а Ася – квадрат, то они не рисовали других фигур. Значит, треугольник нарисовала Маша, и она не рисовала ни круг, ни квадрат.

Можно проверить с помощью таблицы, что в каждом столбце и в каждой строке только один знак «+».

	круг	квадрат	треугольник
Ася	—	+	—
Маша	—	—	+
Галя	+	—	—

Решение (способ 3):

Предположим, что Ася нарисовала квадрат. Тогда Галя солгала, что нарисовала квадрат, а значит Ася и Маша сказали правду. Тогда, согласно словам Аси, Галя нарисовала круг, а Маша нарисовала оставшуюся фигуру – треугольник. Случай подходит.

	круг	квадрат	треугольник
Ася	—	+	—
Маша	—	—	+
Галя	+	—	—

Предположим, что Маша нарисовала квадрат. Тогда Галя солгала, так как сказала, что она нарисовала квадрат, но солгала и Маша, потому что она утверждает, что квадрат нарисовала Ася. Такого быть не может, потому что только одна девочка солгала. Значит, Маша не рисовала квадрат.

	круг	квадрат	треугольник
Ася		—	
Маша	—	+	—
Галя		—	

Предположим, что Галя нарисовала квадрат. Тогда Ася солгала, потому что сказала, что Галя нарисовала круг, а Маша солгала, потому что сказала, что квадрат нарисовала Ася. Снова получается, что две девочки солгали, чего быть не может. Значит, Галя не рисовала квадрат.

	круг	квадрат	треугольник
Ася		—	
Маша		—	
Галя	—	+	—

Итак, подошел только случай, когда квадрат нарисовала Ася.

Ответ: Ася нарисовала квадрат, Маша – треугольник, Галя – круг.

Критерии оценки выполнения работы (1–2 способы):

1 балл	Только верный ответ и/или таблица.
2 балла	–
3 балла	Доказано только про одну из девочек (Машу или Асю), что она не может лгать, то есть говорит правду.
4 балла	Доказано, что Маша и Ася говорят правду, а Галя лжёт. Нет дальнейшего рассуждения. Ответ с ошибкой.
5 баллов	Доказано, что Маша и Ася говорят правду, а Галя лжёт. Нет дальнейшего рассуждения. Ответ правильный, таблица (если есть) составлена верно.
6 баллов	Доказано, что Маша и Ася говорят правду, а Галя лжёт. Есть дальнейшее рассуждение. Фигуры частично распределены верно.
7 баллов	Доказано, что Маша и Ася говорят правду, а Галя лжёт. Дальнейшее рассуждение не содержит ошибок. Фигуры распределены правильно. Ответ верный.

Критерии оценки выполнения работы (3 способ):

1 балл	Только верный ответ и/или таблица.
2 балла	–

3 балла	Доказано только про одну из девочек (Машу или Гаю), что она не рисовала квадрат.
4 балла	Доказано, что Маша и Галя не рисовали квадрат. Нет дальнейшего рассуждения. Ответ с ошибкой.
5 баллов	Доказано, что Маша и Галя не рисовали квадрат. Нет дальнейшего рассуждения. Ответ правильный, таблица (если есть) составлена верно.
6 баллов	Доказано, что Маша и Галя не рисовали квадрат. Есть дальнейшее рассуждение. Фигуры частично распределены верно.
7 баллов	Доказано, что Маша и Галя не рисовали квадрат. Дальнейшее рассуждение не содержит ошибок. Фигуры распределены правильно. Ответ верный.

Примечание 1. При построении рассуждений ученики могут помочь себе заполнением таблицы. Однако, обращаем внимание, что **таблица не является собственно рассуждением**, а представляет собой только иллюстрацию к решению (как схема или рисунок к задаче). Поэтому, составление таблицы обязательно должно сопровождаться **письменным описанием хода рассуждения**.

Примечание 2. Существуют также варианты 3 способа решения, в которых рассматриваются варианты, кто мог нарисовать круг или варианты, кто мог нарисовать треугольник. Они оцениваются аналогично 3 способу решения.