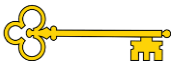
ЗАНЯТИЕ 1. Можно или нельзя?

Учебное содержание

Предметные цели

1. Сформировать знание о решении задач с вопросом «можно ли» и аналогичными вопросами.
2. Развить представления о методах построения примеров и методах доказательств.

Задача-ключ



Может ли сумма цифр трехзначного числа быть равна: а) 23; б) 29?

Решение

а) Да, например, у числа 995.

б) Так как наибольшая цифра — 9, то сумма цифр трехзначного числа не больше 9 + 9 + 9 = 27.
⇒ Сумма цифр трехзначного числа не может быть равна 29.

Ответ: а) да; б) нет.

Советы по решению задач о существовании

1. Чтобы обосновать, что некоторая ситуация возможна, достаточно привести один пример.
2. Чтобы обосновать, что некоторая ситуация невозможна, нужно доказать, что она невозможна ни в каком случае.

Возьми на заметку! Задачи, в которых нужно построить пример, называют ***задачами-конструктивами.***

Вопросы для построения подводящего диалога

1. Как ты думаешь, каков ответ в каждом пункте данной задачи?
2. Какой эксперимент можно провести, чтобы попробовать определить ответ?
3. Какое затруднение мешает подобрать пример?

Как проверить

1. Проверь, что отвечая «да» на вопрос «можно ли?», ты привел конкретный пример, как это могло получиться. Проверь, что пример соответствует всем условиям задачи.
2. Проверь, что отвечая «нет» на вопрос «можно ли?», ты объясняешь, почему это не могло получиться ни в каком случае.

Основные задания

1. Монеты в кармане

В стране Конфе́тии в ходу только монеты в 1, 3 и 5 цукатов. У жителя Конфетии в кармане 10 монет. Может ли у него быть ровно:

а) 24 цуката;

б) 25 цукатов?

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

Подсказка

Посмотри, какие суммы можно набрать десятью монетами. Сформулируй гипотезу и докажи ее.

Решение

а) Набрать 24 цуката 10 монетами можно, например, так:

$$5 + 5 + 5 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 24$$

или

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 3 \cdot 7 + 1 \cdot 3 = 24$$

б) Набрать 25 цукатов не получится. Номинал всех монет страны Конфетии нечетный, а количество монет (10) — четное. Сумма четного числа нечетных чисел равна четному числу, а 25 — нечетное число.

Ответ: а) да; б) нет.

Замечание

Существуют и другие способы набрать 24 цуката.

2. Распилы шахматной доски

Из шахматной доски (см. рис.1) выпилили: а) угловую клетку; б) две соседние угловые клетки; в) две противоположные угловые клетки. Можно ли оставшуюся часть доски распилить на плиточки из двух клеток?

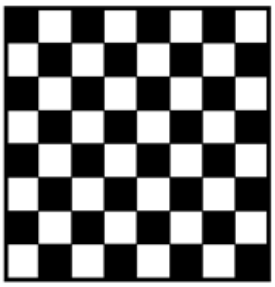


рис. 1

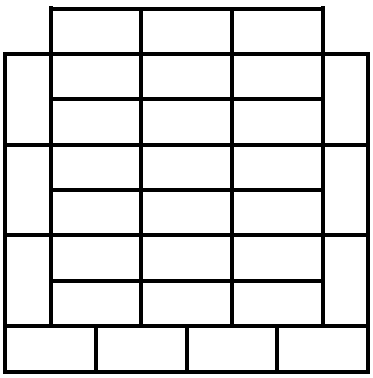
Подсказка

Чем отличаются на шахматной доске выпиленные клетки в пунктах б) и в)?

Решение

а) После вырезания одной угловой клетки на доске останется 63 клетки. Одна плитка занимает 2 клетки, а 63 на 2 не делится. Значит, распилить на плитки оставшуюся часть доски не получится.

б) Один из способов разрезания — на рисунке.



в) Заметим, что противоположные клетки шахматной доски одинакового цвета (обе черные или обе белые), а каждая плиточка содержит одну черную и одну белую клетку. Значит, во всех плиточках вместе поровну черных и белых клеток, а на доске осталось 30 клеток одного цвета и 32 клетки другого цвета. Значит, всю оставшуюся доску разрезать не получится.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

Запись на доске и в рабочей тетради

а) 1) $8 \cdot 8 = 64$ (кл.) — было на доске

2) $64 - 1 = 63$ (кл.) — осталось

3) $2 \cdot 1 = 2$ (кл.) — занимает одна плиточка

4) 63 не делится на 2. ⇒ Разрезание невозможно

в) 1) $8 \cdot 8 = 64$ (кл.) — было на доске

2) $64 : 2 = 32$ (кл.) — было каждого цвета на доске

3) $32 - 2 = 30$ (кл.) — стало одного из цветов

Каждая плиточка накрывает 1 черную и 1 белую клетку. ⇒ Во всех плиточках в сумме поровну черных и белых клеток

4) $30 \neq 32$. ⇒ Нельзя разрезать всю доску

Ответ: а) нет; б) да; в) нет.

Замечание

Существует много разных способов разрезания в пункте б).

Типичные ошибки

При решении пунктов б) и в) задачи школьники могут попытаться применить тот же способ, что и в пункте а). Приведем пример подобного «решения»:

1) $8 \cdot 8 = 64$ (кл.) — было на доске

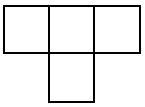
2) $64 - 2 = 62$ (кл.) — осталось

3) $2 \cdot 1 = 2$ (кл.) — занимает одна плиточка

4) 62 делится на 2. ⇒ Разрезание возможно

Внимание!
Пример неверного решения!

Если такой вариант «решения» будет предложен, рекомендуется указать на несостоятельность такого решения на конкретном примере. Например, на невозможность разрезать на плиточки из 2 клеток для фигуры такой формы (хотя 4 делится на 2):



Подобная ошибка является типичной при решении задач с вопросом «Можно ли?». Вместо того, чтобы привести конкретный пример, школьники пытаются доказать, что искомая конструкция непротиворечива, поэтому может существовать. Проблема данного подхода в том, что проверка отсутствия нескольких конкретных противоречий (в данной задаче — нечетность площади фигуры при попытке поделить ее на куски четной площади) не гарантирует, что нет каких-то других противоречий (как в пункте в) данной задачи — неравенство количества черных и белых клеток).

3. Тесноте, да не в обиде

Подсказка

Вспомни, какие линии бьют ладьи (слоны). Сколько таких линий на доске?

Решение

а) На доске всего 8 горизонталей. Если в какой-то горизонтали окажется больше одной ладьи, то две «соседние» ладьи из этой горизонтали будут бить друг друга. ⇒ На каждую горизонталь можно поставить не более 1 ладьи. ⇒ Всего на доску можно поставить не более 8 ладей. ⇒ 9 ладей, не бьющих друг друга, поставить нельзя.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

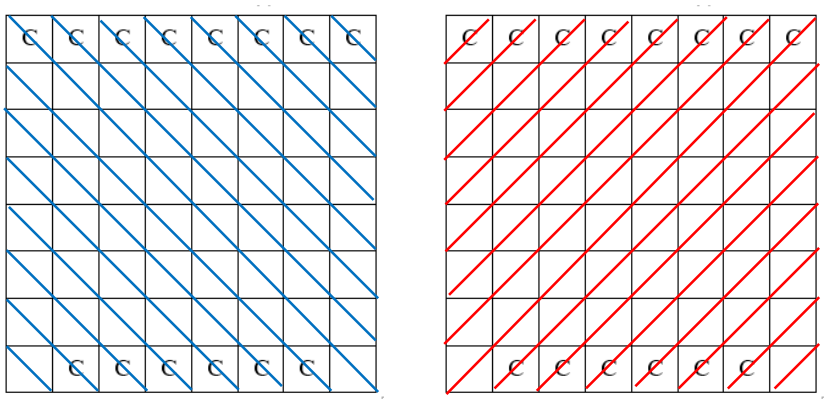
б) Один из примеров расстановки — на рисунке.

Ответ: а) нет; б) да.

С	С	С	С	С	С	С	С
	С	С	С	С	С	С	

Как проверить

Для примера в пункте б) желательно привести обоснование — почему никакие два слона друг друга не бьют. Для этого можно выделить на рисунке диагонали и показать, что на каждой диагонали стоит не более одного слона:



4*. По кругу-1

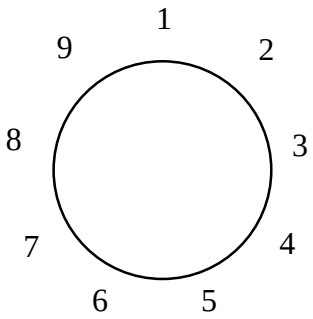
У Тани есть девять карточек с числами от 1 до 9. Может ли она разложить эти карточки по кругу так, чтобы сумма чисел на любых трех подряд идущих карточках: а) делилась на 3; б*) делилась на 2?

Подсказка

Чему равна сумма всех чисел в круге? На какие группы можно разделить числа?

Решение

а) Подойдет расстановка чисел по порядку:

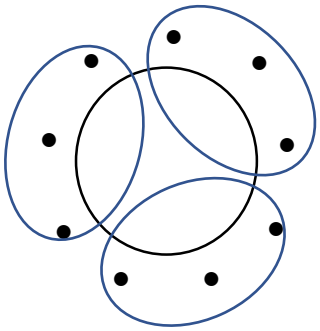


© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

б)

1-*й способ*

Сумма всех чисел на карточках равна 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45, это число нечетное. Разделим все карточки в круге на три непересекающихся тройки:



Так как сумма всех чисел нечетная, то среди сумм в этих тройках одна или три обязательно нечетные. Значит, нельзя разложить карточки так, чтобы сумма в каждой тройке делилась на 2.

2-*й способ*

Сумма всех чисел на карточках равна 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45. Каждое число принадлежит 3 тройкам подряд идущих чисел, поэтому если вычислить сумму всех чисел во всех возможных тройках, то получится 45 · 3 = 135. Это число нечетное, поэтому сумма хотя бы в одной тройке должна быть нечетной. ⇒ Разложить карточки требуемым образом нельзя.

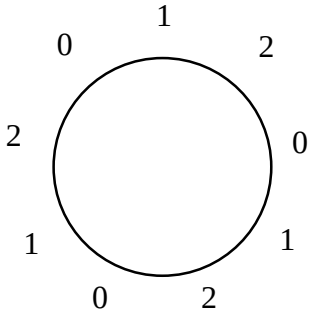
Ответ: а) да; б) нет.

Как проверить

Для примера в пункте а) желательно привести обоснование — почему сумма чисел на любых трех подряд карточках в такой расстановке делится на 3. Для этого достаточно просто выписать эти суммы в явном виде.

Замечание

В пункте а) могут быть и другие примеры. Если перейти от чисел от 1 до 9 к их остаткам от деления на 3, все примеры строятся по схеме:



Замечание

При решении пункта б) недостаточно сослаться на нечетность суммы всех чисел на карточках, нужно еще какое-то из предложенных в способах решения соображений.

По сути, это задача на метод «подсчет двумя способами»: в 1-ом способе решения двумя способами подсчитывается сумма всех чисел на карточках (как сумма чисел от 1 до 9 с одной стороны и как сумма чисел в 3 непересекающихся тройках с другой), а во 2-ом способе подсчитывается утроенная сумма всех чисел (как утроенная сумма чисел от 1 до 9 с одной стороны и сумма чисел во всех возможных тройках — с другой).

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

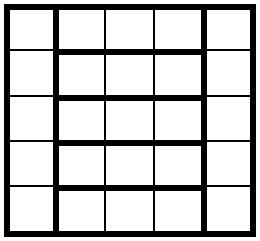
Тренировочные задания

1т. Клад

Пираты нашли клад в виде квадратной золотой плитки размерами 5 м × 5 м. Добычу распилили на прямоугольные куски размерами 1 м × 5 м и 1 м × 3 м. Могло ли получиться а) 7 кусков; б) 8 кусков?

Решение.

а) Пример возможного разрезания — на рисунке:



б) Куски имеют нечетную площадь (в квадратных метрах). Значит, сумма площадей 8 кусков была равна четному числу квадратных метров, а площадь плитки — нечетная ($5 \cdot 5 = 25$ м^2). ⇒ 8 кусков получиться не могло.

Ответ: а) да; б) нет.

2т. Распилы шахматной доски

Из шахматной доски выпилили четыре клетки так, как показано на а) рис.2, б) рис.3. Можно ли оставшуюся часть доски распилить на квадратные плитки со стороной 2 клетки?

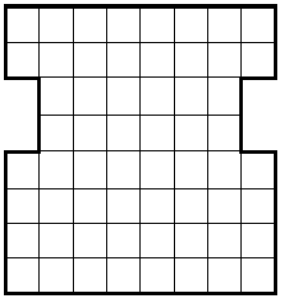


рис. 2

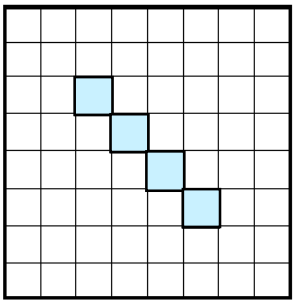
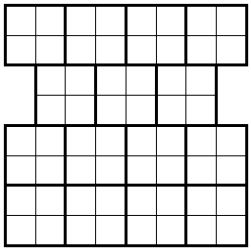


рис. 3

Решение

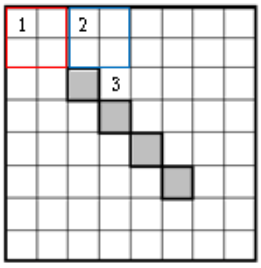
а) Пример возможного разрезания — на рисунке.



© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

б) *1-й способ*

Попробуем разрезать фигуру на квадраты 2 × 2 (см. рисунок)



1) Начнем с клетки 1. Ее можно накрыть только красным квадратом.

2) Клетку 2 можно накрыть только синим квадратом.

3) Клетку 3 квадратом накрыть нельзя. ⇒ Нельзя распилить.

2-й способ

1) Все 4 вырезанные клетки — одного цвета.

2) 8 · 8 = 64 (кл.) — было всего на доске

3) 64 : 2 = 32 (кл.) — было каждого цвета на доске

4) 32 – 4 = 28 (кл.) — стало того цвета, клетки которого вырезали

5) 28 ≠ 32.

Каждая плиточка занимает 2 черных и 2 белых клетки. ⇒ Если бы можно было распилить доску на плитки, то черных и белых клеток было бы поровну, но их разное число: 28 ≠ 32. ⇒ Нельзя распилить.

Ответ: а) да; б) нет.

3т. В тесноте, да не в обиде

Можно ли расставить на шахматной доске а) 10 ферзей; б) 32 коня

так, чтобы никакие две фигуры не били друг друга?

Решение

а) На доске всего 8 горизонталей. Ферзь, стоящий на некоторой горизонтали, бьет ее всю. ⇒ Аналогично случаю с ладьями на каждую горизонталь можно поставить не более 1 ферзя. ⇒ Всего на доску можно поставить не более 8 ферзей. ⇒ 10 ферзей, не бьющих друг друга, поставить нельзя.

б) Да. Например, можно поставить коней только на черные клетки доски. Так как конь, стоящий на черной клетке, бьет только белые клетки, то никакой конь не будет бить никакого другого.

Ответ: а) нет; б) да.

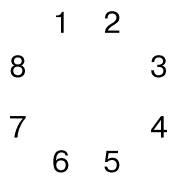
4т*. По кругу-2

Можно ли расставить восемь чисел а) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; б) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел в круге была нечетной?

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

Решение

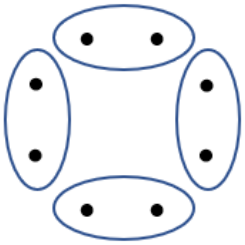
а) Да, например, числа можно поставить по кругу в заданном порядке.



б) 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 = 37 — сумма чисел (нечетное число).

Пусть нам удалось найти нужную расстановку чисел:

Разобьем все числа на 4 непересекающихся пары.



По условию сумма чисел в каждой паре нечетная, поэтому общая сумма должна быть четной. Но она равна нечетному числу 37. Значит, расставить так числа нельзя.

Ответ: а) да; б) нет.

Дополнительные задания

5. Плюс один

В шести пакетах лежат яблоки: в первом пакете 1 яблоко, во втором пакете — 2 яблока, …, в 6 пакете — 6 яблок. За ход разрешается добавить из корзины по одному яблоку в любые два пакета. Можно ли за какое-то количество ходов сделать так, чтобы во всех пакетах было поровну яблок? (Доставать яблоки из пакетов не разрешается.)

Подсказка

Что происходит с общим числом яблок в пакетах за один ход?

Решение.

Изначально в пакетах было 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 яблоко. За один ход к общему количеству яблок в пакетах добавляется 2 яблока. Значит, в сумме в пакетах остается нечетное число яблок. А если бы число яблок в пакетах получилось сравнять (и сделать равным n), то в сумме их оказалось бы $6n$, а это четное число. ⇒ Сравнять число яблок в пакетах нельзя.

Ответ: нет.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru