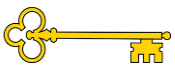
ЗАНЯТИЕ 8. ПЛОЩАДЬ НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

Учебное содержание

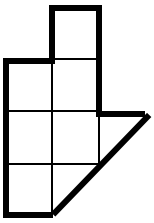
Предметные цели

1. Развивать знания о площади фигуры, формулах площади прямоугольника и прямоугольного треугольника.
2. Развивать умение вычислять площади фигур через разбиение на элементарные части, использовать метод дополнения в геометрических задачах.

Задача-ключ

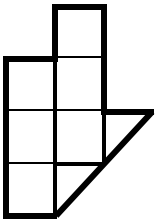


Фигуру разрезали на две равные части. Какой будет площадь каждой части (в клеточках)? Приведи пример возможного разрезания.



Решение

Вычислим площадь фигуры, разрезав ее на прямоугольники и прямоугольные треугольники:

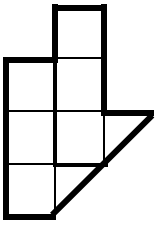


$S_ф = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

$3 + 3 + ½ + ½ = 7$ (кл.) — $S_ф$

При этом площадь каждой части равна 3 ½ клетки.

Вспомним, что фигуры называются равными, если их можно совместить наложением.
Разрежем фигуру на две равные части:



Ответ: 3 ½.

Советы по вычислению площадей фигур

Площадь фигуры равна сумме площадей ее частей.

1. Для вычисления площади фигуру может быть удобно разрезать на простые части (например, прямоугольники, квадраты, прямоугольные треугольники).
2. Для вычисления площади фигур можно из площади большой фигуры вычесть площади «лишних» частей (метод дополнения).

Вопросы для построения подводящего диалога

1. Какая фигура (фигуры) дана в задаче? Можно ли вычислить ее площадь по формуле?
2. Как можно дополнить фигуру в условии до прямоугольника?
3. На какие части, формулы вычисления площадей которых известны, можно поделить фигуру в условии?

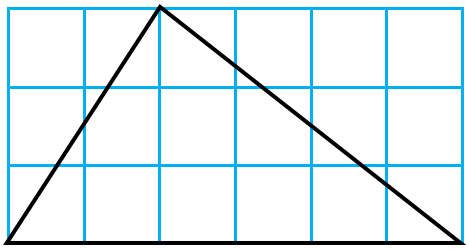
Как проверить

Для проверки вычисленной площади можно разрезать фигуру на части и составить из них фигуру, у которой легко вычислить площадь.

Основные задания

1. Коробка (5 мин)

Треугольный торт положили в прямоугольную коробку так, как показано на рисунке. Какую часть площади коробки занимает торт?

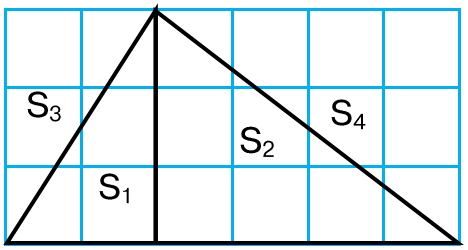


Подсказка

Попробуй разрезать торт на такие части, площадь которых легко вычислить по известной формуле.

Решение

Разделим коробку на две прямоугольные части, как показано на рисунке:



1-*й способ*

1) $(2 \cdot 3) : 2 = 3$ (кл.) — S_1

2) $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ (кл.) — S_2

3) $3 + 6 = 9$ (кл.) — S торта

4) $6 \cdot 3 = 18$ (кл.) — S коробки

5) $9 : 18 = ½$

2-*й способ*

Заметим, что две прямоугольные части оказались разрезанными диагоналями на 2 равные части в виде прямоугольных треугольников: одну занимает торт, а вторую — пустая часть коробки. Значит, торт занимает половину площади коробки.

Запись на доске и в рабочей тетради

$S_1 = S_3$

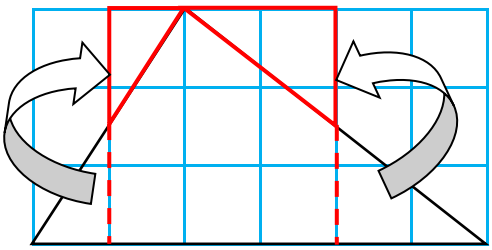
$S_2 = S_4$

Значит, $S_1 + S_2 = S_3 + S_4 \Rightarrow$ Площади занятой тортом и свободной частей коробки равны $\Rightarrow$ Торт занимает половину площади коробки.

Ответ: половину (½).

Проверка

Вырежем такой торт-треугольник из бумаги. Разрежем его на части так, как показано на рисунке. Тогда из образовавшихся частей можно составить квадрат из 9 клеток, что составляет половину площади исходного прямоугольника (18 клеток). Это доказывает, что торт занимает половину площади коробки.

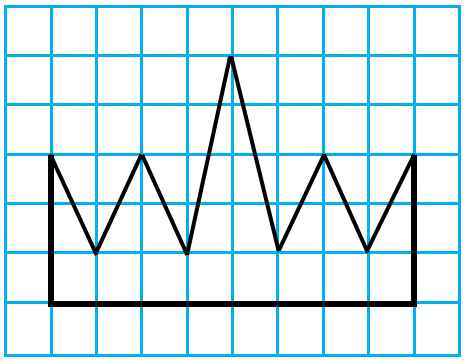


Замечание

Один способ решения также может служить проверкой другому способу.

2. Корона (5 мин)

На листе бумаги нарисована корона. Найди ее площадь (в клетках).

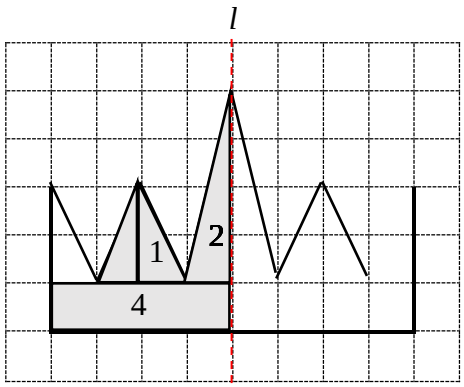


Подсказка

Есть ли у этой фигуры ось симметрии? Как ось симметрии может помочь упростить вычисления?

Решение

У этой фигуры есть вертикальная ось симметрии, поэтому достаточно найти площадь только одной половины фигуры, а потом удвоить ее. Разделим левую половину на прямоугольники и прямоугольные треугольники, на рисунке подпишем их площадь.



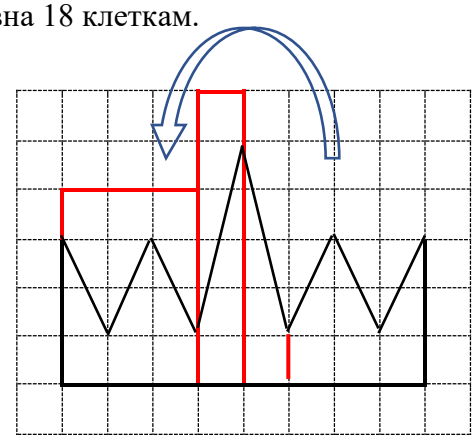
1) 1 + 1 + 1 + 2 + 4 = 9 (кл.) — площадь одной половины

2) 9 · 2 = 18 (кл.)

Ответ: 18 клеток.

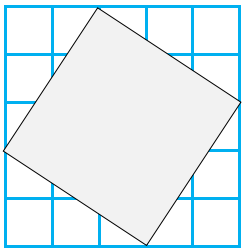
Проверка

Если разрезать фигуру так, как показано на рисунке, и переложить части, то получатся прямоугольники 3 × 4 и 1 × 6, площади которых равны 12 и 6 клеткам соответственно. Поэтому площадь фигуры равна 18 клеткам.



3. План комнаты (5 мин)

На рисунке изображен план комнаты с ковром. Каждая клетка на плане соответствует 1 м^2 в квартире. Чему равна площадь ковра?



Подсказка 1

Попробуй воспользоваться методом дополнения.

Подсказка 2

Попробуй применить метод разделения фигуры (ковра) на части.

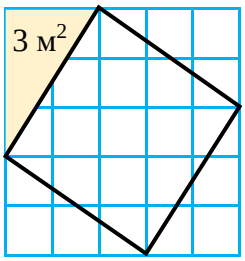
Решение

1-*й способ (метод дополнения)*

1) 5 · 5 = 25 (м^2) — S комнаты

2) (3 · 2) : 2 = 3 (м^2) — S треугольной части пола без ковра

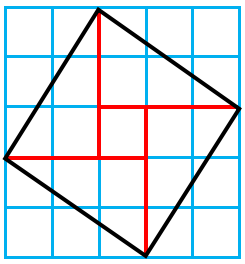
3) 25 – 3 · 4 = 13 (м^2)



2-*й способ (метод разбиения)*

1) $(3 \cdot 2) : 2 = 3$ (м^2) — S треугольной части ковра

2) $4 \cdot 3 + 1 = 13$ (м^2)



Ответ: 13 м^2.

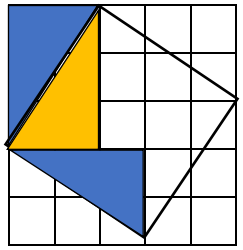
Проверка

Для проверки ответа можно отрезать «лишние» треугольные части и разместить их «внутри ковра» (см. рисунок). Тогда получится, что площадь ковра на 1 м^2 больше площади оставшейся части пола, а значит, площадь ковра можно найти как:

$$(25 – 1) : 2 + 1 = 13 \text{ (м}^2\text{)}$$

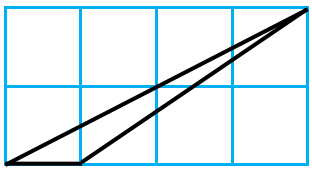
Замечание

В сильных группах можно обсудить, почему ковер имеет форму квадрата. Длины сторон этого четырехугольника равны, потому что это длинные стороны (гипотенузы) равных треугольников. А углы у этой фигуры прямые, потому что каждый угол ковра состоит из двух углов таких треугольников, которые вместе образуют прямой угол (см. рис.).



4*. Тонкий треугольник (5 мин)

Таня нарисовала треугольник на клетчатой бумаге. Найди площадь этого треугольника (в клетках). Нарисуй еще 3 треугольника с такой же площадью и вершинами в углах клеточек.



Подсказка

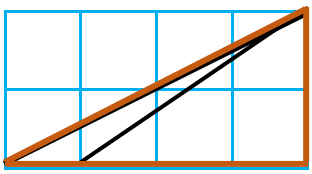
Известна ли тебе формула площади такого треугольника? Попробуй применить метод дополнения.

Решение

Приведем два способа вычисления площади треугольника. Один способ может служить «проверкой» для другого.

1-*й способ*

Дополним треугольник до прямоугольного треугольника так, как показано на рисунке:



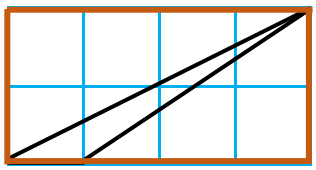
1) (4 · 2) : 2 = 4 (кл.) — *S* большого треугольника

2) (2 · 3) : 2 = 3 (кл.) — *S* «лишней» части

3) 4 – 3 = 1 (кл.)

2-*й способ*

Положим треугольник в прямоугольную «коробку» так, как показано на рисунке:



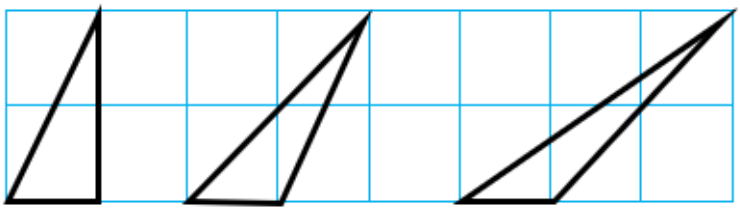
1) 4 · 2 = 8 (кл.) — S прямоугольника

2) (4 · 2) : 2 = 4 (кл.) — S «лишней» части слева

3) (2 · 3) : 2 = 3 (кл.) — S «лишней» части справа

4) 4 – 3 = 1 (кл.)

Теперь нарисуем еще несколько треугольников площадью 1 клеточка. Идея построения может быть такой: будем рисовать треугольники так, чтобы, как в 1 способе, площадь треугольника была равна разности двух последовательных чисел.

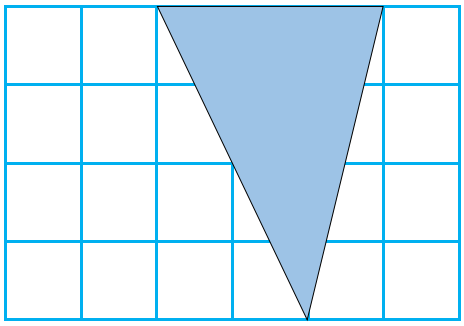


Ответ: 1 клетка; примеры – на рисунке.

Тренировочные задания

1т. Треугольник на листе

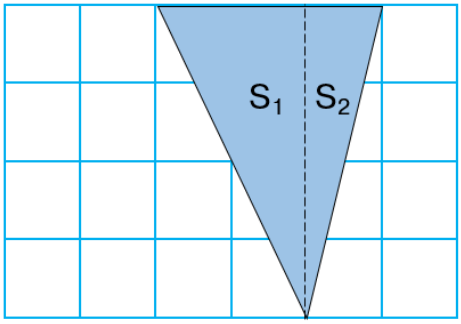
У Жени был прямоугольный лист бумаги. Она закрасила на нем треугольник так, как показано на рисунке. Какую часть этого листа закрасила Женя?



Решение

Разделим треугольник на два треугольника, как показано на рисунке. Обозначим их площади S_1 и S_2.

1-й способ



1) $(4 \cdot 2) : 2 = 4$ (кл.) — S_1

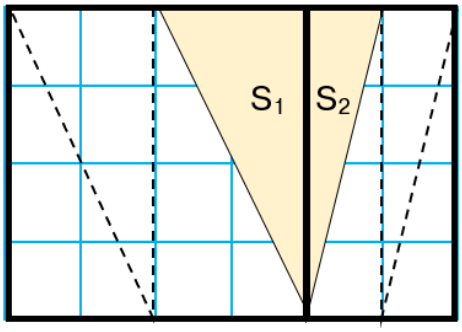
2) $(4 \cdot 1) : 2 = 2$ (кл.) — S_2

3) $4 + 2 = 6$ (кл.) — S треугольника

4) $6 \cdot 4 = 24$ (кл.) — S листа

5) $24 : 6 = 4 \Rightarrow$ Площадь треугольника составляет четверть площади листа.

2-й способ



S_1 = четверти площади квадрата 4×4

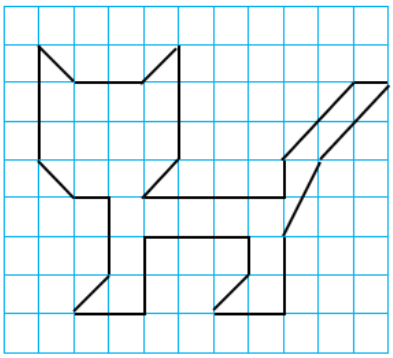
S_2 = четверти площади прямоугольника 2×4 $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Площадь закрашенной части составляет четверть площади листа.

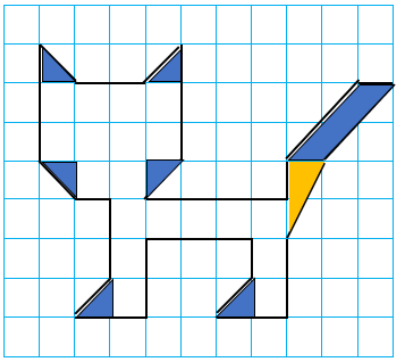
Ответ: четверть $\left(\frac{1}{4}\right)$.

2т. Котенок

Даниил нарисовал на клетчатой бумаге котенка и решил раскрасить его в серый цвет. Одну клеточку он закрашивает за 5 с. За сколько времени Даниил раскрасит всю картинку?



Решение



Раскрасим одним цветом одинаковые треугольные части.
Синих треугольников с площадью в половину клетки 10 штук, и они вместе имеют площадь 5 клеток. Оранжевый треугольник имеет площадь 1 клетка. Белых клеток (они все целые) — 19. Итого: $5 + 1 + 19 = 25$ клеток.
Одну клетку Даниил красит за 5 секунд, значит, 25 клеток он покрасит за $5 \cdot 25$ с $= 125$ с $= 2$ мин 5 с.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) 10 синих половинок = 5 полных клеток.

2) Оранж. треугольник = 1 полной клетке.

3) Белых полных клеток — 19.

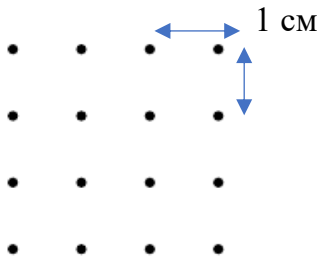
4) $5 + 1 + 19 = 25$ (кл.) — площадь рисунка

5) $5 \cdot 25 = 125$ (с) $= 2$ мин 5 с.

Ответ: 2 мин 5 с.

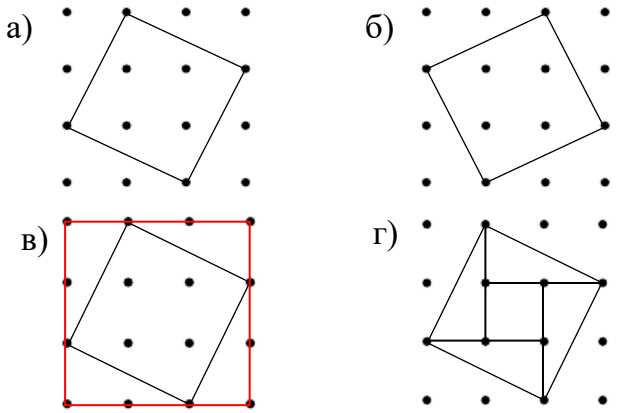
3т. Необычный квадрат

Соедини 4 точки на рисунке отрезками так, чтобы получился квадрат площадью 5 см^2. Объясни, почему твой способ подходит.



Решение

Возможные примеры квадратов на рис. а), б). Докажем, что их площадь равна 5 см^2.



Заметим, что эти квадраты равны, поэтому для проверки достаточно посчитать площадь любого из них. Покажем например, что площадь квадрата на рис. а равна 5 см^2.

1-*й способ* (рис. в)

1) $3 \cdot 3 = 9$ (см^2) — S большого квадрата

2) $(2 \cdot 1) : 2 = 1$ (см^2) — S треугольника

3) $9 – 1 \cdot 4 = 5$ (м^2)

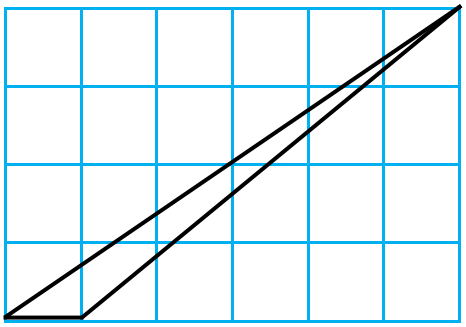
2-*й способ* (рис. г)

1) $(2 \cdot 1) : 2 = 1$ (см^2) — S треугольника

2) $1 \cdot 4 + 1 = 5$ (см^2)

4т*. Тонкий треугольник

Найди площадь треугольника на рисунке (в клетках). Нарисуй еще 2 треугольника той же площади с вершинами в углах клеток.



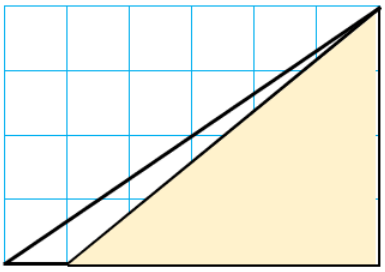
Решение

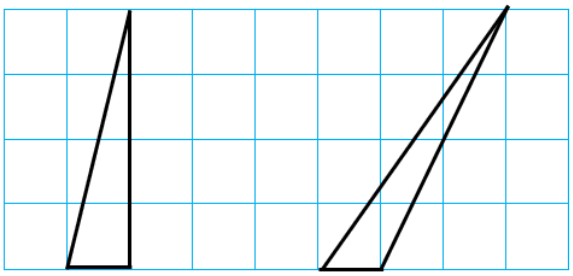
1) $(6 \cdot 4) : 2 = 12$ (кл.) — S большого треугольника

2) $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ (кл.) — S желтого треугольника

3) $12 – 10 = 2$ (кл.)

Примеры треугольников площадью в 2 клетки — на рисунке.





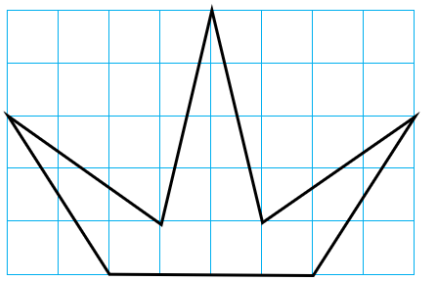
Ответ: 2 клетки; примеры — на рисунке.

Дополнительные задания

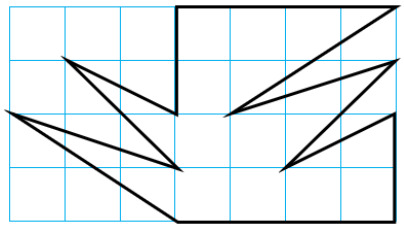
5. Удобный подсчет

Найди площади фигур (в клетках). Придумай для них названия.

а)



б)

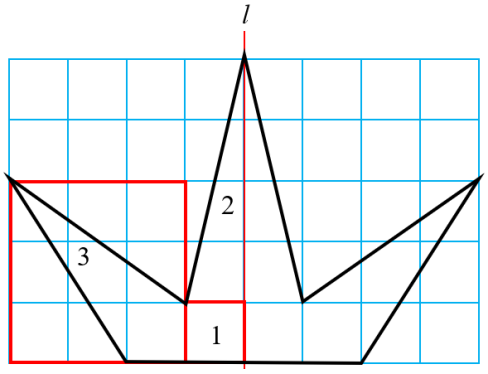


Подсказка

а) Смотри подсказку к задаче № 2.

б) Вырежи эту фигуру из бумаги. Разрежь ее на части так, чтобы из них можно было составить удобную фигуру.

Решение



а) У фигуры есть вертикальная ось симметрии, которая делит ее на две части равной площади. Поэтому найдем площадь S фигуры, удвоив площадь одной из этих частей.

1) $1 \cdot 1 = 1$ (кл.) — S_1

2) $(1 \cdot 4) : 2 = 2$ (кл.) — S_2

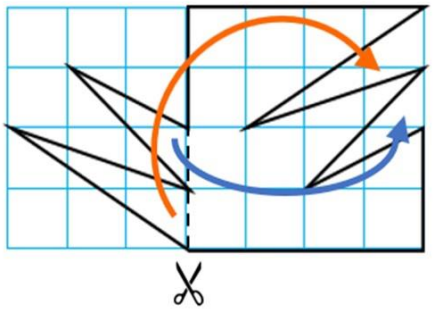
3) $3 \cdot 3 – [(3 \cdot 2) : 2] \cdot 2 = 3$ (кл.) — S_3

4) $1 + 2 + 3 = 6$ (кл.) — половина S

5) $6 \cdot 2 = 12$ (кл.)

Фигуру можно назвать «Корона».

Ответ: площадь «Короны» равна 12 клеткам.



б) Два треугольных выреза внизу фигуры совпадают по форме с двумя треугольными выступами вверху фигуры. Если отрезать выступы и вставить их в вырезы, получится квадрат 4 × 4.

$4 \cdot 4 = 16$ (кл.)

Фигуру можно назвать «Парусник».

Ответ: площадь «Парусника» равна 16 клеткам.