# ЗАНЯТИЕ 4. МЕТОД ПЕРЕБОРА

## Учебное содержание

### *Предметные цели*

1. Развить представления о неравенствах, двойных неравенствах (строгих и нестрогих).
2. Расширить представления о высказываниях о логическом следовании.
3. Познакомить с методом перебора при решении арифметических задач.
4. Сформировать умение использовать делимость для ограничения перебора.

### *Задача-ключ*

В школьной олимпиаде по математике было 4 задачи. Аля и Валя, ученицы 4 «Я» класса, решили поровну задач (каждая решила хоть одну задачу). Все остальные их одноклассники вместе решили 44 задачи. Известно, что общее число задач, решенных учениками 4 «Я», делится на 5 без остатка. Сколько задач могла решить Аля? Укажи все возможные варианты.

**Решение**

Обозначим за А количество задач, решенных Алей, а В — Валей. Из условия известно, что А = В, $1 \le A \le 4$, $1 \le B \le 4$, тогда А = 1, 2, 3 или 4 и В = 1, 2, 3 или 4.

Для нахождения всех возможных вариантов воспользуемся методом перебора. Оформим перебор в виде таблицы.

| **А** | **А + В** | **Весь класс 44 + (А + В)** | **Делится на 5** |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 46 | Нет |
| 2 | 4 | 48 | Нет |
| 3 | 6 | 50 | Да |
| 4 | 8 | 52 | Нет |

Итак, под все условия задачи подходит только вариант, когда Аля решила 3 задачи.

**Ответ:** 3 задачи.

### *Советы по решению задач методом перебора*

1. Если в задаче есть переменная, которая может принимать несколько значений, то можно перебрать все варианты значения этой переменной и выбрать подходящие.
2. Если в задаче есть несколько неизвестных величин (переменных), то лучше выбрать для перебора ту, для которой вариантов меньше.
3. Перебор можно оформить в виде таблицы с пояснениями.

### *Вопросы для построения подводящего диалога*

1. Какие неизвестные есть в задаче?
2. Какие значения могут принимать эти неизвестные?
3. Как значения неизвестных связаны между собой?
4. Какую неизвестную лучше выбрать для перебора?
5. Значения каких неизвестных нужно указать в таблице?

### *Как проверить*

1. Подставить полученный ответ и проверить, что он подходит ко всем условиям.
2. Проверить, что при переборе или решении неравенства все варианты рассмотрены.

### *Основные задания*

## 1. Яблоки (3 мин)

Таня и Марина сорвали с дерева несколько яблок, причем Марина сорвала в 2 раза больше яблок, чем Таня. Общее число сорванных девочками яблок делится на 6. Сколько яблок могла сорвать Таня, если Марина сорвала меньше 10? Укажи все возможные варианты.

**Подсказка**

Сколько яблок могла сорвать Марина?

**Решение**

Марина сорвала четное число яблок, так как она собрала вдвое больше, чем Таня. При этом Марина сорвала менее 10 яблок (и больше 0). Получается, что Марина могла сорвать 2, 4, 6 или 8 яблок. Разберем эти случаи.

| **М** | **Т** | **М + Т** | **Делится на 6** |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | Нет |
| 4 | 2 | 6 | Да |
| 6 | 3 | 9 | Нет |
| 8 | 4 | 12 | Да |

**Запись на доске и в рабочей тетради**

$М = Т \cdot 2 \Rightarrow М$ — четное число, $0 < М < 10 \Rightarrow М = 2, 4, 6$ или 8.

| **М** | **Т** | **М + Т** | **Делится на 6** |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | Нет |
| 4 | 2 | 6 | Да |
| 6 | 3 | 9 | Нет |
| 8 | 4 | 12 | Да |

**Ответ:** 2 или 4 яблока.

**Замечание**

Если школьники знакомы с признаками и свойствами делимости, то можно предложить другой вариант решения. Число делится на 6 тогда и только тогда, когда число делится на 2 и на 3. Так как Марина сорвала в 2 раза больше яблок, чем Таня, вместе они сорвали в три раза больше яблок, чем Таня, то есть общее число сорванных яблок делится на 3. С другой стороны, чтобы

общее число делилось на 2, нужно, чтобы Таня собрала четное число яблок. Значит, подходят варианты, когда Таня сорвала 2 или 4 яблока.

## 2. Головы и ноги (6 мин; для двух групп — у каждой своя подсказка)

По ферме гуляли утки и козы. Юра насчитал у животных всего 24 головы и 64 ноги. Сколько уток и сколько коз гуляло по ферме?

**Подсказка 1**

Если бы все животные были утками, то было бы ____ ног. Замена одной утки на козу увеличивает количество ног на __.

**Подсказка 2**

Если бы все животные были козами, то было бы ____ ног. Замена одной козы на утку уменьшает количество ног на __.

**Решение**

1-*й способ*.

1) 2 · 24 = 48 (ног) – если бы все были утками;

2) 64 – 48 = 16 (ног) – «не хватает»;

Замена одной утки на козу увеличивает общее число ног на 2.

3) 16 : 2 = 8 (коз) – на дворе;

4) 24 – 8 = 16 (ут.)

2-*й способ*.

1) 4 · 24 = 96 (ног) – если бы все были козами;

2) 96 – 64 = 32 (ног) – «лишних»;

Замена одной козы на утку уменьшает общее число ног на 2.

3) 32 : 2 = 16 (ут.) – на дворе;

4) 24 – 16 = 8 (коз)

**Ответ:** 16 уток и 8 коз.

**Как проверить**

Посчитать количество голов и ног в получившемся ответе.

**Замечание**

Данную задачу можно решить и с помощью метода перебора. Всего на ферме 24 животных, и теоретически можно проверить случай, когда 0 уток и 24 козы, 1 утка и 23 козы, и т. д. Но в этом случае переменная (число уток) может принимать много значений, поэтому предлагается другой, более рациональный, вариант решения.

## 3. Волшебный сад (6 мин; для двух групп — у каждой своя подсказка)

Трем садовникам — Двойке, Пятерке и Семерке — Королева велела покрасить белые розы в красный цвет. На каждом кусте растет по 6 белых роз. За первый день работы садовники успели покрасить все розы на нескольких кустах. Пятерка покрасил больше всех роз —17, а Семерка меньше всех — 7. Сколько роз покрасил Двойка?

**Подсказка**

1) Какое наибольшее число роз мог покрасить Двойка? А какое наименьшее число роз?

2) Как связаны между собой число роз, которые покрасил Двойка, и общее число покрашенных роз?

**Решение**

1-*й способ*

Обозначим П, С, Д — количество роз, покрашенных каждым.

1) 17 + 7 = 24 (роз.) — П + С.

2) Общее число покрашенных роз делится на 6. ⇒ Д делится на 6*.

3) 7 < Д < 17 ⇒ Д = {8, 9, 10, 11, **12**, 13, 14, 15, 16}

Из вариантов подходит только Д = 12.

2-*й способ*

1) 7 + 17 = 24 (розы) — покрасили Пятерка и Семерка.
2) Р — количество роз, которое могли покрасить все три садовника.
   р > 24, р ⋮ 6 (кратно 6) ⇒ Р = {30, 36, 42, 48, 54, 60, …}
3)

| **Общее число роз (Р)** | **Покрасил Двойка (Д = Р – 24)** | **Соответствие условию 7 < Д < 17** |
|---|---|---|
| 30 | 6 | нет, так как 6 < 7 |
| 36 | 12 | **ДА**, так как 7 < 12 < 17 |
| ≥ 42 | ≥ 18 | нет, так как 18 > 17 |

Из вариантов подходит только Д = 12.

**Ответ:** 12 роз.

**Вопросы для построения подводящего диалога**

1. Что можно сказать об общем числе покрашенных роз?
2. А о числе роз, покрашенном Двойкой?

***Замечание**

При обсуждении решения 1-м способом нужно проговорить, почему Д должно делиться на 6. Объяснение может быть, например, таким: «Число роз на кусте равно 6, и было покрашено несколько целых кустов. Значит, всего было покрашено число роз, делящееся на 6, т. е. (П + С + Д) ⋮ 6. С другой стороны, П + С = 24, то есть (24 + Д) ⋮ 6. Отсюда по правилу деления суммы на число (если сумма кратна 6, одно из слагаемых (П + С) тоже кратно 6 (т.к. 24 ⋮ 6)), значит второе слагаемое (Д), тоже будет кратно 6.

## 4. Угадай подъезд (5 мин)

Федя собрался в гости к Вадиму. Вадим живет в девятиэтажном доме с 10 подъездами в квартире №333. Федя не знает число квартир на каждом этаже, но знает, что оно одинаковое во всех подъездах и не больше четырех. В каком подъезде живет Вадим?

**Подсказка**

Перебор удобно вести по числу квартир на этаже (1, 2, 3 или 4). Сколько всего квартир в доме в каждом случае?

**Решение**

Составим таблицу перебора вариантов.

| Кв. на этаже | Кв. в подъезде | Всего кв. в доме | Подходит |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 · 9 = **9** | 9 · 10 = **90** | нет (90 < 333) |
| 2 | 2 · 9 = **18** | 18 · 10 = **180** | нет (180 < 333) |
| 3 | 3 · 9 = **27** | 27 · 10 = **270** | нет (270 < 333) |
| 4 | 4 · 9 = **36** | 36 · 10 = **360** | да (360 > 333) |

1-*й способ*

1) 4 · 9 = 36 (кв.) — в каждом подъезде

2) 360 – 36 = 324 (кв.) — в девяти первых подъездах

3) 324 < 333 < 360 ⇒ Квартира №333 девятая по счету в десятом подъезде.

2-*й способ*

1) 4 · 9 = 36 (кв.) — в каждом подъезде;

2) 333 : 36 = 9 подъезд (ост. 9) ⇒ Квартира №333 девятая по счету в десятом подъезде.

**Ответ:** в 10-м подъезде.

## 5*. Сад на балконе (5 мин)

У Наташи на балконе цветет 17 лилий: белые, желтые и розовые. Белых лилий в пять раз больше, чем желтых, а розовых меньше, чем белых. Сколько на Наташином балконе лилий каждого цвета? Найди все варианты и объясни, почему других нет.

**Подсказка**

Сколько белых лилий может быть на балконе?

**Решение**

1-*й способ*

Обозначим число лилий: Б, Ж, Р. Так как Б в 5 раз больше, чем Ж, то Б делится на 5. При этом 1 ≤ Ж ≤ 17. Значит, Ж = 5, 10 или 15.

| Б | Ж | Р | Подходит |
|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 17 – 5 – 1 = **11** | нет (Р > Б) |
| 10 | 2 | 17 – 10 – 2 = 5 | да |
| 15 | 3 | ? | нет (Б + Ж > 17) |

2-*й способ*

Обозначим число лилий: Б, Ж, Р. Будем перебирать по числу желтых лилий.

| Ж | Б | Р | Подходит |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 17 – 5 – 1 = **11** | нет (Р > Б) |
| 2 | 10 | 17 – 10 – 2 = 5 | да |
| 3 | 15 | ? | нет (Ж + Б > 17) |
| больше 3 | больше 15 | ? | нет (Ж + Б > 17) |

**Ответ:** 10 белых, 2 желтых и 5 розовых лилий.

## *Тренировочные задания*

### 1т. Что в кармане?

У Стаса два кармана на брюках. В правом кармане в 4 раза больше монет, чем в левом. Всего в карманах меньше 20 монет. Когда Стас достал из карманов все монеты, он смог разложить их поровну в три столбика. Сколько монет могло быть у Стаса в правом кармане?

**Решение**

Пусть у Стаса П монет в правом кармане и Л монет — в левом.

П = Л · 4 ⇒ П делится на 4, 0 < П < 20 ⇒ П = 4, 8, 12 или 16.

| **П** | **Л** | **П + Л** | **П + Л делится на 3** |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 5 | Нет |
| 8 | 2 | 10 | Нет |
| 12 | 3 | 15 | Да |
| 16 | 4 | 20 | Нет |

**Ответ:** 12 монет.

### 2т. Головы и ноги

В инсектарии живут красные и зеленые многоножки. У красных многоножек по 33 ножки, а у зеленых — по 22 ножки. Всего в инсектарии — 17 многоножек, у которых вместе 506 ножек. Сколько в инсектарии живет красных и сколько зеленых многоножек?

**Решение**

1-*й способ*

1) 22 · 17 = 374 (н.) — если бы все многоножки были зелеными

2) 506 – 374 = 132 (н.) — «не хватает»

3) 33 – 22 = 11 (н.) — меньше у зеленой многоножки, чем у красной

3) 132 : 11 = 12 (мн.) — красных

4) 17 – 12 = 5 (мн.) — зеленых

2-*й способ*

1) 33 · 17 = 561 (н.) — если бы все многоножки были красными

2) 561 – 506 = 55 (н.) — «лишние»

3) 33 – 22 = 11 (н.) — больше у красной многоножки, чем у зеленой

3) 55 : 11 = 5 (бук.) — зеленых

4) 17 – 5 = 12 (бук.) — красных

**Ответ:** 12 красных и 5 зеленых многоножек.

### 3т. Дневник погоды

Степа несколько полных недель вел дневник погоды. Согласно его дневнику, больше всего было солнечных дней — 23, а меньше всего пасмурных без дождя — 12. Сколько могло быть дождливых дней?

**Решение**

1-*й способ*

23 + 12 = 35 (дн.) — без дождя

Пусть $n$ дн. — всего в дневнике. Это составляет несколько полных недель ⇒ $n$ делится на 7.

$n$ делится на 7, $n > 35 \Rightarrow n = \{42, 49, 56, 63, 70, \ldots\}$

Пусть d дн. — дождливых, тогда $12 < d < 23$.

$d = n - 35$

| **Все дни ($n$)** | **Дождливые дни ($d$)** | **Подходит под условие $12 < d < 23$** |
|---|---|---|
| 42 | 7 | нет |
| 49 | 14 | да |
| 56 | 21 | да |
| 63 и более | 28 и более | нет |

2-*й способ*

1) 23 + 12 = 35 (дней) — без дождя.

2) $n$ — возможное число дней, в дневнике наблюдений, $d$ — число дождливых дней.
$n > 35$, $n \vdots 7$ (кратно 7, т.к. полные недели) ⇒ $n = \{42, 49, 56, 63, 70, \ldots\}$

3)

| **Число дней в дневнике наблюдений ($n$)** | **Дождливых дней ($d = n - 35$)** | **Соответствие условию $12 < d < 23$** |
|---|---|---|
| 42 | 7 | нет, так как $7 < 12$ |
| 49 | 14 | да, так как $12 < 14 < 23$ |
| 56 | 21 | да, так как $12 < 21 < 23$ |
| $\geq 63$ | $\geq 28$ | нет, так как $23 < 28$ |

При дальнейшем увеличении количества дней в дневнике наблюдений, число дождливых дней будет увеличиваться.

Из рассмотренных вариантов подходят два: 14 и 21 дождливый день

**Ответ:** 14 или 21 день.

## 4т. Угадай этаж

Кристина живет в четвертом подъезде дома в квартире № 193. Всего в доме 4 подъезда, и в каждом из них на всех этажах по 4 квартиры. В районе Кристины имеются только девятиэтажки, двенадцатиэтажки и шестнадцатиэтажки. На каком этаже живет Кристина?

**Решение**

| **Этажей в доме** | **Кв. в подъезде** | **Всего кв. в доме** | **Подходит** |
|---|---|---|---|
| 9 | $4 \cdot 9 =$ **36** | $36 \cdot 4 =$ **144** | нет ($144 < 193$) |
| 12 | $4 \cdot 12 =$ **48** | $48 \cdot 4 =$ **192** | нет ($192 < 193$) |
| 16 | $4 \cdot 16 =$ **64** | $64 \cdot 4 =$ **256** | да ($256 > 193$) |

1-*й способ*

1) $4 \cdot 16 = 64$ (кв.) — в каждом подъезде

2) $64 \cdot 3 = 192$ (кв.) — в первых трех подъездах

3) 4-й подъезд: квартиры с 193-ей по 256-ю ⇒ Квартира №193 на первом этаже.

2-*й способ*

1) 4 · 16 = 64 (кв.) — в каждом подъезде

2) 193 : 64 = 3 (ост. 1) ⇒ Квартира №193 первая в своем подъезде, а значит на первом этаже.

**Ответ:** на 1-м этаже.

## 5т*. Чудо-дерево

На чудо-дереве растут яблоки, груши и сливы, всего 26 фруктов. Яблок на дереве в 7 раз меньше, чем груш, а слив меньше, чем яблок. Сколько фруктов каждого вида растет на чудо-дереве?

**Решение**

1-*й способ*

Обозначим число фруктов: Я, Г, С. Так как Я в 7 раз меньше, чем Г, то Г делится на 7. При этом 1 ≤ Г ≤ 26. Значит, Г = 7, 14 или 28.

| Г | Я | С | Подходит |
|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 26 – 7 – 1 = **18** | нет (С > Я) |
| 14 | 2 | 26 – 14 – 2 = **10** | нет (С > Я) |
| 21 | 3 | 26 – 21 – 3 = **2** | да |

2-*й способ*

Обозначим число фруктов: Я, Г, С. Будем перебирать по числу яблок.

| Я | Г | С | Подходит |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 26 – 7 – 1 = **18** | нет (С > Я) |
| 2 | 14 | 26 – 14 – 2 = **10** | нет (С > Я) |
| 3 | 21 | 26 – 21 – 3 = **2** | да |
| > 3 | > 26 | ? | нет (Я + Г > 26) |

**Ответ:** 3 яблока, 21 груша и 2 сливы.

### *Дополнительные задания*

## 6. Удивительные лошади

В королевской конюшне страны Слейпнерии есть пятиногие и шестиногие лошади. Когда на каждую лошадь сел двуногий всадник, оказалось, что вместе у них всех 44 ноги. Сколько пятиногих и сколько шестиногих лошадей в табуне?

**Подсказка**

Сколько всего ног у одной лошади и всадника вместе?

**Решение**

1-*й способ*

1) 5 + 2 = 7 (н.) — у всадника и пятиногой лошади

2) 6 + 2 = 8 (н.) — у всадника и шестиногой лошади

3) Если все лошади – пятиногие, то 44 : 7 = 6 лошадей и ост. 2 ноги.

4) 8 – 7 = 1 (н.) — у всадника на шестиногой лошади больше

5) 2 : 1 = 2 (л.) — шестиногих

6) 6 – 2 = 4 (л.) — пятиногих

2-*й способ*

1) 5 + 2 = 7 (н.) — у всадника и пятиногой лошади

2) 6 + 2 = 8 (н.) — у всадника и шестиногой лошади

3) Если все лошади – шестиногие, то ближайшее число ног, большее 44 и кратное 8 — это 48. Тогда было бы 48 : 8 = 6 шестиногих лошадей.

4) 8 – 7 = 1 (н.) — у всадника на шестиногой лошади больше

5) 48 – 44 = 4 (н.) — «лишние»

5) 4 : 1 = 4 (л.) — пятиногих

6) 6 – 4 = 2 (л.) — шестиногих

3-*й способ*

1) 5 + 2 = 7 (н.) — у всадника и пятиногой лошади

2) 6 + 2 = 8 (н.) — у всадника и шестиногой лошади

3) Количество ног у всадника и шестиногой лошади в сумме делится на 8. Значит, может быть 1, 2, 3, 4 или 5 шестиногих лошадей (если их больше 5, то будет больше 44 ног в сумме).

| **Ш. л.** | **«Ног» осталось** | **Подходит** |
|---|---|---|
| 1 | 44 – 8 · 1 = 36 | нет (36 не делится на 7) |
| 2 | 44 – 8 · 2 = 28 | да |
| 3 | 44 – 8 · 3 = 20 | нет (20 не делится на 7) |
| 4 | 44 – 8 · 4 = 12 | нет (12 не делится на 7) |
| 5 | 44 – 8 · 5 = 4 | нет (4 не делится на 7) |

4) 28 : 7 = 4 (л.)

**Ответ:** 4 пятиногих и 2 шестиногих лошади.

**Замечание**

Рассмотрим подробнее 3-й пункт решения 1-м способом, в котором рассматривается вариант, что все лошади пятиногие. Теоретически, остаток 2 мог получиться не только из-за добавления 2 «лишних» ног за счет шестиногих лошадей, но и за счет добавления, например, 9 «лишних» ног (и вообще любого числа, дающего остаток 2 при делении на 7), то есть при замене 9 пятиногих лошадей на шестиногих. Однако в данной задаче другие варианты невозможны, так как частное (6 лошадей) не может быть меньше числа «лишних» ног.

Из аналогичных соображений в 3-м пункте решения 2-м способом берется именно ближайшее число, делящееся на 8 (то есть 4 «недостающих» ноги). Если взять другое число, дающее остаток 4 при делении на 8, то оно будет больше частного.