ЗАНЯТИЕ 25. РАСПОЛОЖЕНИЕ ФИГУР

Учебное содержание

Предметные цели

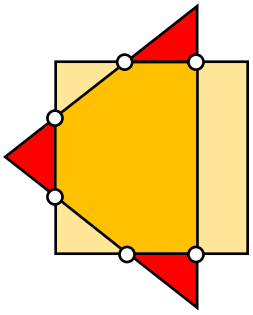
1. Расширить знания о методе перебора в геометрических задачах.
2. Развить представления о выпуклых и невыпуклых многоугольниках.
3. Познакомить с понятием пересечения и объединения фигур.
4. Сформировать представления о возможном количестве сторон у многоугольника, образованного при пересечении фигур.

Задача-ключ

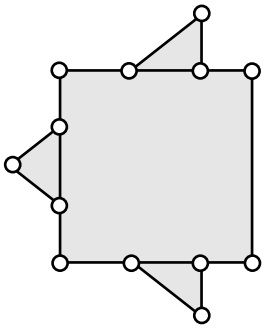
Саша нарисовал на листе желтый квадрат, а затем на том же листе — красный треугольник. Там, где фигуры наложились, краски смешались, и образовался оранжевый шестиугольник. а) Нарисуй возможный рисунок Саши. б) Обведи на этом рисунке внешнюю границу получившейся цветной области так, чтобы получился многоугольник. Сколько вершин у этого многоугольника? в*) Докажи, что квадрат и треугольник нельзя наложить так, чтобы внешней границей оказался многоугольник с бóльшим числом вершин.

Решение

а) Один из возможных вариантов — на рисунке.



б) Внешняя граница образует многоугольник с 13 вершинами.



в*) Больше 13 вершин быть не может. В качестве вершин фигуры могут выступать либо вершины исходных фигур (квадрата и треугольника), либо точки, образовавшиеся при пересечении некоторых линий. Всего у квадрата 4 вершины, а у треугольника — 3 вершины. Каждая сторона треугольника может пересекать стороны квадрата не более, чем в 2 точках. Значит, всего у многоугольника не более, чем $4 + 3 + 2 \cdot 3 = 13$ вершин.

Путь к решению

а) Оранжевый цвет получается там, где накладываются (пересекаются) треугольник и квадрат.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Вершинами многоугольника в пересечении могут быть либо вершины накладывавшихся треугольника и квадрата, либо точки пересечения сторон этих фигур. При этом сторона треугольника может пересекать не более, чем 2 стороны квадрата. Если каждая сторона треугольника будет пересекать ровно 2 стороны квадрата, в пересечении получится как раз 2 · 3 = 6 точек. Значит, осталось расположить треугольник так, чтобы каждая его сторона пересекала 2 стороны квадрата.

Советы по решению задач о расположении фигур

Объединением фигур назовем фигуру, состоящую из всех точек этих фигур (рис. 1).

Пересечением фигур назовем фигуру, состоящую из всех общих точек этих фигур (рис. 2).

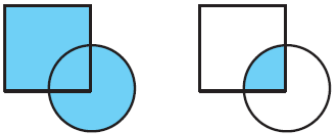


Рис. 1 Рис. 2

1. Для нахождения объединения и пересечения фигур бывает полезно использовать модели этих фигур (рисунки или фигуры, вырезанные из бумаги).

2. Найти нужное расположение фигур может помочь связь между количеством вершин данных фигур и искомой фигуры.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. О каких фигурах идет речь в задаче? Что тебе известно об этих фигурах?

2. Есть ли в задаче описание некоторого процесса? Если да, то сколько у него этапов? Какая ситуация может быть после первого этапа? После остальных этапов?

3. Изобрази рисунок, который подходит только к некоторым условиям задачи. Можно ли его «исправить» так, чтобы выполнялись все условия?

Как проверить

Для проверки можно вырезать модели из бумаги и проверить выполнение всех условий.

Основные задания

1. Треугольник и квадрат

Нарисуй треугольник и квадрат так, чтобы объединением фигур был 10-угольник, а пересечением — 5-угольник.

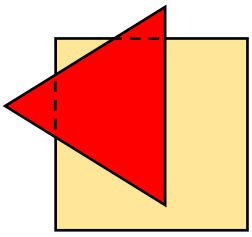
Подсказка

Наложи треугольник на квадрат произвольным способом. Сколько углов получилось у фигуры в их объединении? Как можно изменить форму или положение треугольника так, чтобы в объединении оказался десятиугольник?

Решение

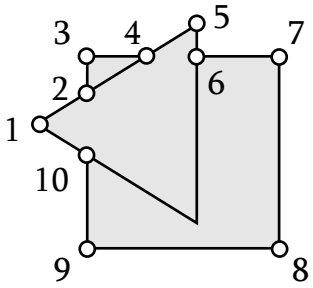
Один из возможных вариантов — на рисунке.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

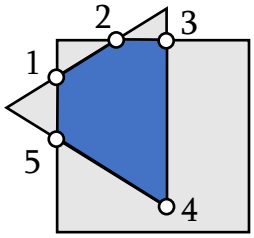


Проверка

Объединение:



Пересечение:



Путь к решению

Рассмотрим конструкцию, которая получилась в ключевой задаче. Тогда в объединении фигур был 13-угольник. Чтобы получился 10-угольник, нужно «убрать» 3 вершины. Это можно сделать, если нарисовать треугольник так, чтобы он не пересекал одну из сторон (это как раз «убирает» из объединения 2 вершины, по которым треугольник пересекался с этой стороной, а также одну из вершин треугольника).

2. Мастерский разрез

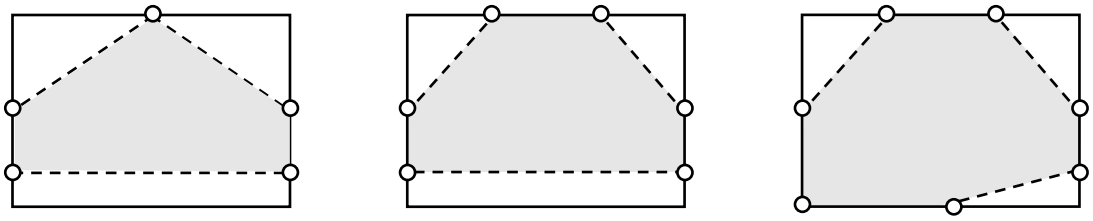
У трех мастеров было по одинаковой прямоугольной доске. Каждый из них 3 раза отрезал от своей доски кусок прямым разрезом. В итоге у первого остался 5-угольник, у второго — 6-угольник, а у третьего — 7-угольник. Нарисуй, как могли получиться эти фигуры.

Подсказка

Сколько углов было у изначальной фигуры? Сколько углов может стать у доски, если уже сделаны 2 отреза?

Решение

Возможные примеры — на рисунке.

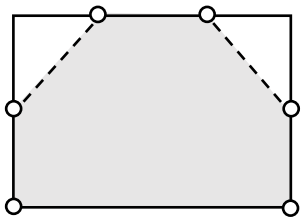


Пятиугольник Шестиугольник Семиугольник

Путь к решению

Вначале у доски было 4 угла. Если «отпилить» два соседних угла доски, то получится 6-угольник:

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute



Заметим, что если отрезать прямоугольник снизу, то доска останется 6-угольной. Если совместить две точки на верхней стороне, то получится 5-угольник. 7-угольник же получится, если сделать третий разрез не параллельно стороне («отрезать» еще один угол доски).

Замечание

Можно доказать, что тремя разрезами от края до края нельзя получить многоугольник с числом сторон большим, чем 7: каждый такой разрез «добавляет» не больше одного угла, поэтому у фигуры будет не более, чем 4 + 3 = 7 углов. Но данное доказательство выходит за рамки курса 4 класса.

3. Оставшиеся части

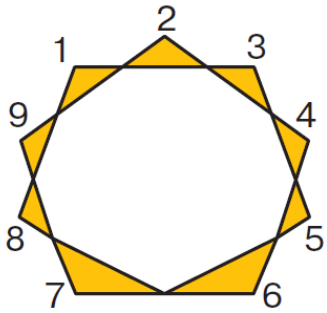
Алеша вырезал из белого листа бумаги два пятиугольника и расположил их так, чтобы они пересеклись. Все части, где пятиугольники **не пересеклись**, он раскрасил желтым цветом. Получилось 9 желтых треугольников. Нарисуй, как это могло быть.

Подсказка

Наложи 2 пятиугольника так, чтобы в пересечении получился десятиугольник. Раскрась необщие части желтым цветом. Сколько желтых треугольников получилось? Как «исправить» рисунок так, чтобы их стало 9?

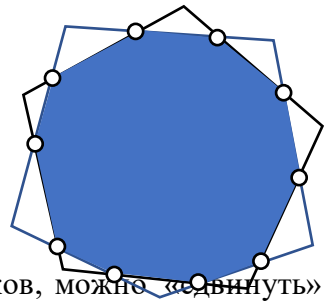
Решение

Один из возможных примеров — на рисунке.



Путь к решению

Если наложить фигуры так, чтобы в пересечении получился десятиугольник, в разности получится 10 треугольников.



Чтобы получилось 9 треугольников, можно «сдвинуть» одну из вершин пятиугольника на сторону, таким образом убрав один из треугольников.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

4*. Темная история

В подвале четырехугольной формы стояла лампа, которая не освещала один из его углов. Лампу удалось переставить так, чтобы все углы стали освещены. Нарисуй возможную схему подвала и положения лампы до и после перестановки. (Лампа освещает все точки вдоль каждого луча, выходящего из лампы.)

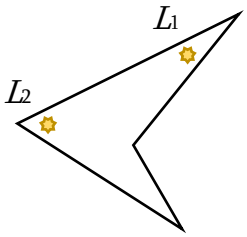
Подсказка

1) Изобрази подвал прямоугольной формы и поставь лампу в некоторую точку внутри. Все ли углы окажутся освещены? Можно ли поставить лампу так, чтобы какой-то угол не был освещен?

2) Попробуй поменять форму (углы) четырехугольного подвала.

Решение

Один из возможных вариантов — на рисунке.



L_1 — начальное положение лампы

L_2 — конечное положение лампы

Объясним, почему этот пример подходит, двумя способами.

1-*й способ*

Вначале лампа освещала все лучи с вершиной в точке L_1. При этом правый нижний угол подвала оставался неосвещенным, так как был отделен стеной (на рисунке а) показан «крайний» луч). А после перемещения лампы (см. рисунок б)) стены не препятствуют прохождению лучей, и все углы будут освещены.

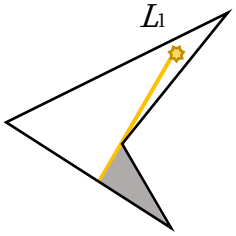


рис. а)

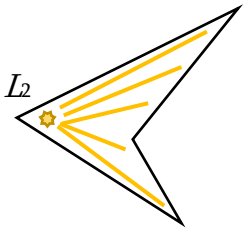
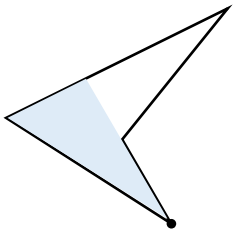
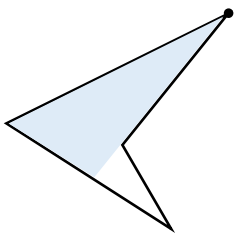


рис. б)

2-*й способ («с конца»)*

Нарисуем для верхнего правого и нижнего правого углов фигуры множества точек, где могла бы стоять лампа, чтобы они были освещены:





Отсюда видим, что вначале лампа не освещала правый нижний угол, а в конце она освещает оба правых угла. Остальные два угла также освещены.

Замечание

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Для любого выпуклого четырехугольника и любого положения лампы внутри него углы четырехугольника окажутся освещенными, поэтому такие примеры не подходят.

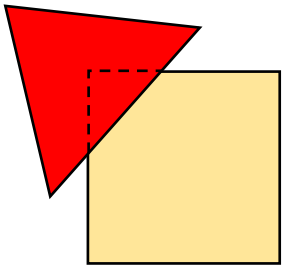
Тренировочные задания

1т. Треугольник и квадрат

Нарисуй треугольник и квадрат так, чтобы в объединении получился восьмиугольник, а в пересечении — треугольник.

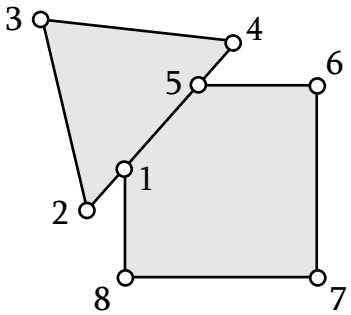
Решение

Один из возможных вариантов — на рисунке.

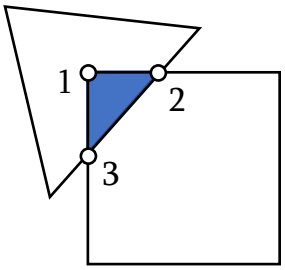


Проверка

Объединение:



Пересечение:



Путь к решению

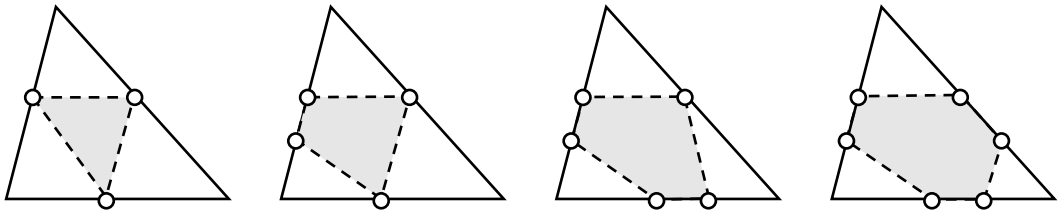
Вместе у квадрата и треугольника 7 вершин. Если добавить две вершины в точках пересечения сторон треугольника и квадрата, и при этом «убрать» одну из вершин квадрата, то получится нужный способ расположения фигур.

2т. Ученик

У ученика краснодеревщика была треугольная заготовка. Ученик 3 раза отрезал от нее по куску прямолинейным разрезом. Сколько углов могло стать у заготовки после этого? Найди как можно больше вариантов и покажи для каждого способ разрезания.

Решение

У заготовки могло получиться от 3 до 6 углов. Возможные примеры — на рисунке.



3 угла 4 угла 5 углов 6 углов

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Ответ: 3, 4, 5 или 6 углов.

Замечание

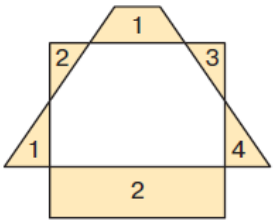
По аналогии с решением пункта (*) задачи № 2 можно показать, что больше 6 углов получиться не может (и очевидно меньше 3 углов не может получиться).

3т. Оставшиеся части

Алеша вырезал из белого листа бумаги два четырехугольника и расположил их так, чтобы они пересеклись. Все части, где четырехугольники не пересеклись, он раскрасил желтым цветом. Получилось 4 желтых треугольника и 2 желтых четырехугольника. Нарисуй, как это могло быть.

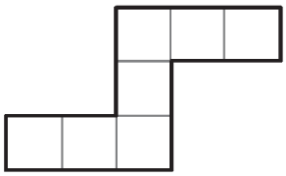
Решение

Один из возможных вариантов — на рисунке.



4т*. Темная история

Коридор во дворце имеет форму, как на рисунке. Докажи, что все углы этого коридора нельзя осветить одним факелом.

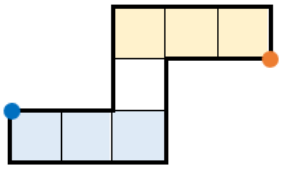


Решение

1) Синий угол освещается только из синей области.

2) Оранжевый угол освещается только из оранжевой области.

3) Области не пересекаются ⇒ осветить оба угла одним факелом нельзя.



Дополнительные задания

5. Хитрые разрезы

У Саши был прямоугольный лист картона. Он нарисовал на листе 3 отрезка и сделал по ним разрезы. В итоге у него получилось три куска, в том числе один 8-угольник. Нарисуй, как Саша мог сделать разрезы.

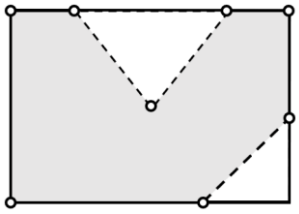
Подсказка

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Каждый ли Сашин разрез делил лист на части? Попробуй провести несколько разрезов и определи, как у фигур изменяется число углов.

Решение

Возможныей пример — на рисунке. Существуют и другие.



Путь к решению

Попробуем сделать распил от края до края, отрезая от прямоугольника кусок (см. рис. 1а и 1б). Мы отрезаем один или два угла, а добавляются не более двух новых углов с вершинами в концах отрезка, по которому шел распил. Значит количество углов любой из частей после такого распила не может увеличиться более, чем на 1[1]. Тогда за три распила оно увеличится не более, чем на 3. В начале у доски было 4 угла, и такими распилами можно получить фигуру не более, чем с 3 + 4 = 7 углами, а должна получиться фигура с 8 углами. Получается, что не все распилы должны быть от края до края.

Поэтому попробуем сделать распил, который не отделяет от доски новый кусок. Для этого нарисуем отрезок, соединяющий точку на стороне (но не в вершине) прямоугольника и какую-нибудь точку внутри него (см. рис. 2). Теперь, чтобы в итоге отрезать от доски кусок, можно провести отрезок, соединяющий эту «внутреннюю» точку и другую точку на той же стороне прямоугольника (см. рис. 3) и сделать по нему распил. Заметим, что мы не «отрезали» ни один угол прямоугольника, но добавили 3 новых угла. Таким образом, сделав два распила, мы добились того, что одна из частей стала семиугольником. Оставшимся распилом можно, например, отрезать один из углов исходного прямоугольника, увеличив количество углов еще на 1 (см. рис. 4).

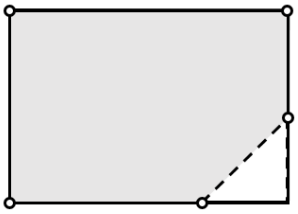


Рис. 1а

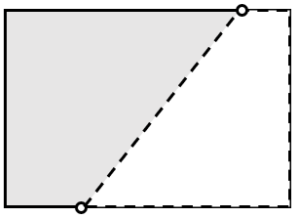


Рис. 1б

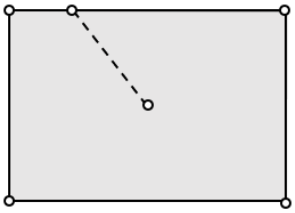


Рис. 2

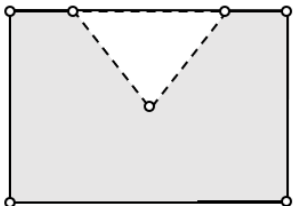


Рис. 3

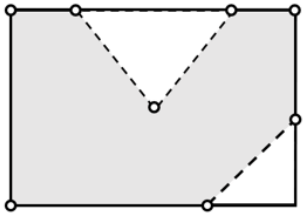


Рис. 4

[1] При описанной операции «отрезания» все образующиеся части получаются выпуклыми фигурами. Именно поэтому число углов при «отрезании» не может увеличиться более, чем на 1.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute