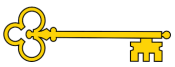
ЗАНЯТИЕ 24. РАЗРЕЗАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Учебное содержание

Предметные цели

1. Развить представления о методе «проб и ошибок» в геометрических задачах.
2. Развить умение изображать объемные фигуры и использовать различные способы изображения объемных фигур при решении задач.
3. Сформировать представления о симметрии объемных фигур.
4. Получить первичный опыт решения задач на «оценку и пример» с геометрическим содержанием.

Задача-ключ



У Сени есть коробка в виде куба со стороной 30 см. а) Покажи, как ему уложить в эту коробку 6 деталей в форме прямоугольного параллелепипеда размерами 20 см × 20 см × 10 см. б) Сможет ли Сеня уложить в коробку большее количество деталей?

Решение

а) Разделим коробку на 27 кубиков размерами 10 см × 10 см × 10 см. Изобразим раскладку деталей по горизонтальным слоям толщиной 10 см и покажем одинаковыми цифрами (и цветом) те кубики, которые оказались в одной детали.

2	2	3
1	1	3
1	1	

2	2	3
4		3
4	5	5

	6	6
4	6	6
4	5	5

б) Нет, не сможет. Коробка имеет объем 30 · 30 · 30 = 27 000 см^3, а одна деталь имеет объем 20 · 20 · 10 = 4000 см^3. Так как 27 000 : 4000 = 6 (ост. 3000), поместить больше 6 деталей не получится.

Путь к решению

Разделим коробку на 27 кубиков размерами 10 см × 10 см × 10 см. Также коробку можно разделить на 3 горизонтальных слоя по 9 кубиков. Внутри одного слоя можно поместить только одну деталь. Попробуем положить эту деталь в нижний слой (возможно, этот способ укладки не подойдет, тогда нужно будет искать раскладку, в которого ни одна деталь не лежит целиком в нижнем слое). Тогда в этом слое останется 5 свободных кубиков, четыре из которых можно заполнить вертикальными деталями (равными цифрами обозначены кубики, оказавшиеся внутри одной детали):

2	2	3
1	1	3
1	1	

нижний слой

Изобразим второй (средний) слой. В нем четыре кубика уже будут заняты деталями №2 и №3:

2	2	3
		3

средний слой

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Если теперь уложить четвертую деталь в четыре свободные клетки среднего слоя, то в оставшееся место можно будет уложить только одну пятую деталь (в верхний слой), а всего должно быть 6 деталей. Поэтому заполним четыре кубика среднего ряда еще двумя вертикальными деталями:

2	2	3
4		3
4	5	5

средний слой

Рассмотрим верхний слой. В нем четыре кубика заняты вертикальными деталями, но осталось место для шестой детали:

4		
4	5	5

верхний слой

Так и получается приведенный выше пример.

Советы по решению задач на разрезание объемных фигур

1. Разрезания объемной фигуры, составленной из кубиков, можно изобразить по слоям, отмечая одинаково (например, цветом или числами) кубики одной части.
2. Для оценки наибольшего количества частей при разрезании объемной фигуры на равные части можно разделить объем всей фигуры на объем одной части.

Вопросы для построения подводящего диалога

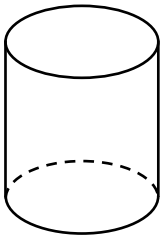
1. Сколько частей должно получиться? Какой они формы?
2. Как будет удобно изобразить фигуру и ее части?

Как проверить

Сделай макет из подручных материалов (например, из пластилина). Разрежь фигуру придуманным образом и проверь равенство частей.

Основные задания

1. Режем торт (3 мин)



К празднику испекли торт в форме цилиндра (см. рис.). Как разделить этот торт на 8 частей тремя прямыми разрезами?

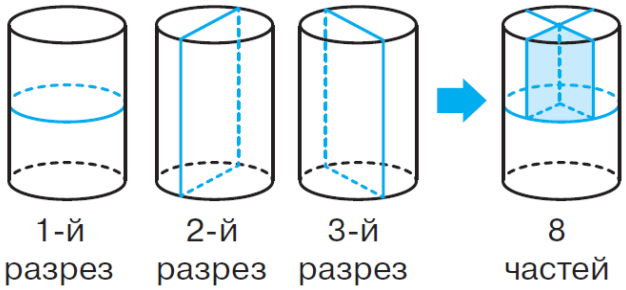
Подсказка

Какие разрезы делят торт на две равные части?

Решение

Один из вариантов разрезания — на рисунке.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute



Путь к решению

Цилиндр можно разделить на две равные части «поперек» и «вдоль». Если сначала сделать разрез «поперек», то получится 2 равные части в виде цилиндра. Если теперь провести разрез «вдоль», то обе эти части поделятся на 2 равные части и получится 4 части. Далее еще одним разрезом «вдоль» можно разрезать каждую часть пополам и получить 8 частей.

Замечание 1

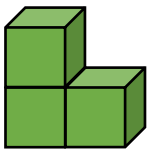
Выбранные в примере разрезы идут по плоскостям симметрии цилиндра. Это гарантирует равенство всех полученных частей. Однако это равенство в условии не требуется, поэтому есть и другие варианты разрезания цилиндра на 8 частей.

Замечание 2

Можно доказать, что меньшим трех количеством прямых разрезов обойтись не получится, даже если части можно перекладывать после каждого разрезания.

2. Разбираем куб (3 мин)

Распили куб 3 × 3 × 3 на восемь «уголков» из трех кубиков 1 × 1 × 1 (см. рис.) и три отдельных кубика. Нарисуй куб по слоям, одинаково обозначая кубики одного «уголка».



Подсказка

В какую удобную фигуру можно объединить два «уголка»?

Решение

Один из возможных примеров — на рисунке (отдельные кубики не отмечены цифрами).

Путь к решению

Заметим, что из двух «уголков» можно составить один слой 3 × 2 × 1. Поэтому из шести таких уголков легко составить параллелепипед 3 × 3 × 2. Оставшийся слой 3 × 3 × 1 легко заполнить двумя уголками и тремя кубиками.

Замечание

Существуют и другие примеры.

3. Собираем куб (4 мин)

У Темы есть много кубиков одинакового размера синего, зеленого и красного цветов. Помоги ему составить куб из 27 кубиков так, чтобы в любом ряду из трех кубиков (по длине, ширине и высоте) были кубики всех трех цветов. Решение изобрази по слоям.

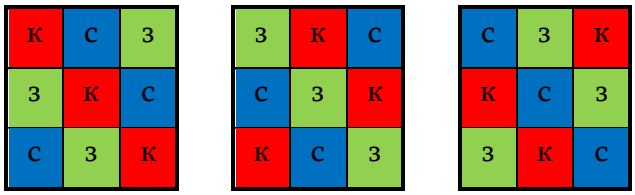
© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Подсказка

Изобрази куб по слоям. Сначала заполни нижний слой тремя синими, тремя зелеными и тремя красными кубиками так, чтобы в каждой строке и каждом столбце этого слоя были кубики всех трех цветов.

Решение

Один из возможных примеров — на рисунке.



Как проверить

Проверь, что в каждой строке, столбце и на одинаковых местах кубики разного цвета.

Путь к решению

Сначала узнаем, сколько кубиков каждого цвета понадобится. Для этого разрежем куб 3 × 3 × 3 на 9 столбиков из трех кубиков. По условию задачи в каждом ряду должны оказаться кубики всех трех цветов, значит, кубиков каждого цвета должно быть 9. Аналогично можно понять, что в каждом слое 3 × 3 × 1 должно быть ровно 9 : 3 = 3 кубика каждого цвета.

Расставим в нижнем слое кубики так, чтобы в каждой строке и каждом столбце были кубики каждого из трех цветов. Далее, в средний слой над каждым красным кубиком поставим зеленый кубик, над синим — красный, а над зеленым — синий. Так как «схема» расстановки не поменялась, то в среднем ряду снова в каждой строке и каждом столбце будут кубики всех трех цветов. Поставим кубики в верхний слой по той же схеме. В итоге и в каждом слое, и в каждом «столбике» все условия задачи будут выполняться.

Замечание 1

Существуют и другие варианты решения.

Замечание 2

Способ заполнения, на который указывает подсказка, рассматривался в 3 классе в занятии №18 «Раскраски досок».

4*. Скажи «сы-ы-ыр» (5 мин)

У повара есть кусок сыра в виде куба со стороной 30 см, который нужно разрезать на кубики со стороной 10 см несколькими прямыми разрезами (после каждого разреза куски сыра можно перекладывать как угодно). Помоги повару разрезать этот сыр. Постарайся использовать как можно меньше разрезов.

(*) Сможет ли повар обойтись меньшим числом разрезов, чем получилось у тебя?

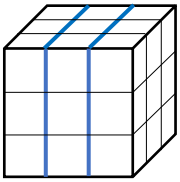
Подсказка

Представь сыр разделенным на кубики со стороной 10 см. У какого кубика больше всего «соседей»?

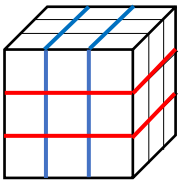
Решение

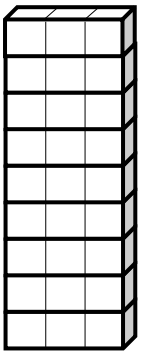
Для удобства разметим куб на маленькие кубики со стороной 10 см. Получится куб 3 × 3 × 3. Первыми двумя разрезами поделим куб на слои размерами 3 × 3 × 1:

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute



Оставим слои на месте и следующими двумя горизонтальными разрезами поделим полученные слои на бруски 3 × 1 × 1:



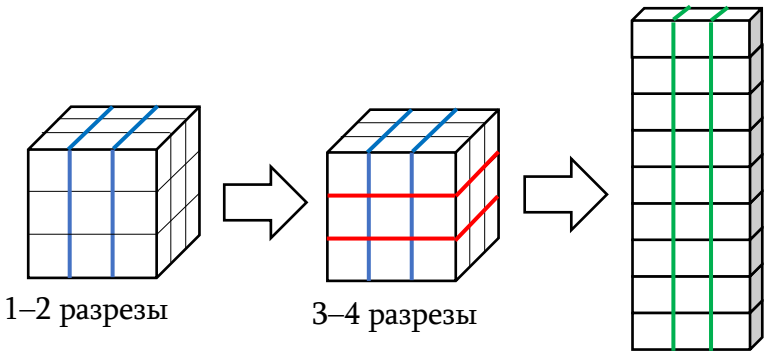


Далее положим все 9 получившихся брусков так, чтобы получился один параллелепипед 3 × 1 × 9 (см. рисунок).

Тогда двумя вертикальными разрезами все бруски разбиваются на кубики со стороной 10 см.

(*) Числом плоских разрезов, меньшим 6, обойтись не получится. Заметим, что куб со стороной 30 см можно разрезать на кубики со стороной 10 см единственным образом (как разрезание куба 3 × 3 × 3 на кубики 1 × 1 × 1). Центральный кубик каждой из своих 6 граней соединен с некоторым другим кубиком. Так как разрезы прямые, то никакой разрез не может одновременно идти по двум граням кубика. Значит, чтобы отделить только один центральный кубик, нужно сделать 6 разрезов, и общее число разрезов не меньше 6.

Запись на доске и в рабочей тетради



(*) Для отделения центрального кубика нужно 6 разрезов. Значит, меньше 6 разрезов недостаточно.

Ответ: возможный пример — на рисунке; нет.

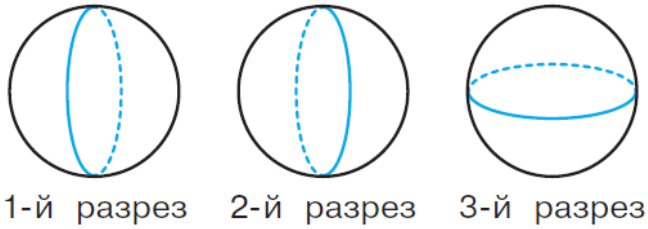
Тренировочные задания

1т. Режем арбуз

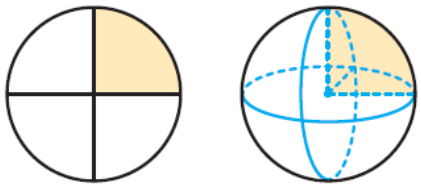
Папа купил арбуз и разделил его тремя прямыми разрезами. Получилось 8 частей. Покажи, как он мог сделать разрезы.

Решение

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute



Всего 8 частей (по 4 в каждой половинке):

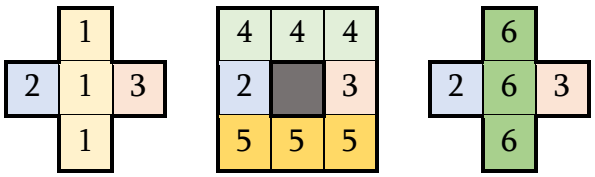


2т. Разбираем куб

Представь себе фигуру, которая получится, если из обычного кубика 3 × 3 × 3 вынуть средний кубик и все угловые кубики. Распили такую фигуру на бруски 3 × 1 × 1. Нарисуй фигуру по слоям, обозначая одинаково кубики, которые находятся в одном бруске.

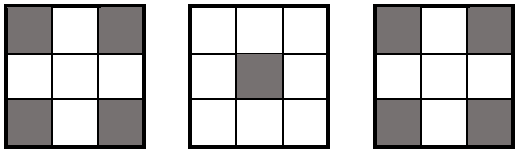
Решение

Один из возможных вариантов решения — на рисунке.



Путь к решению

Если разделить фигуру на слои, то в нижнем и верхнем слое не будет 4 угловых кубиков, а в среднем слое — центрального кубика (отмечены на рисунке серым).



Всего остается 3 · 3 · 3 – 4 · 2 – 1 = 18 кубиков, значит, должно получиться 18 : 3 = 6 брусков.

Начнем разбиение с нижнего слоя. Он состоит из 5 кубиков, поэтому из него можно вырезать один брусок. Таким же образом вырежем брусок из верхнего слоя над первым бруском. В нижнем и верхнем слое останутся по 2 кубика, их можно включить в два вертикальных бруска. Тогда в среднем слое остается два ряда по 3 кубика, которые дают еще два бруска.

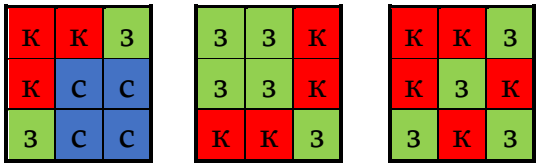
3т. Собираем куб

У Темы есть много кубиков одинакового размера синего, зеленого и красного цветов. Помоги ему составить куб из 27 кубиков так, чтобы в любом ряду из трех кубиков были кубики ровно двух цветов (но во всем кубе должны быть кубики всех трех цветов).

Решение

Один из возможных вариантов — на рисунке.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute



Как проверить

Проверь, что в каждой строке, столбце и на одинаковых местах два кубика одного цвета и один — другого.

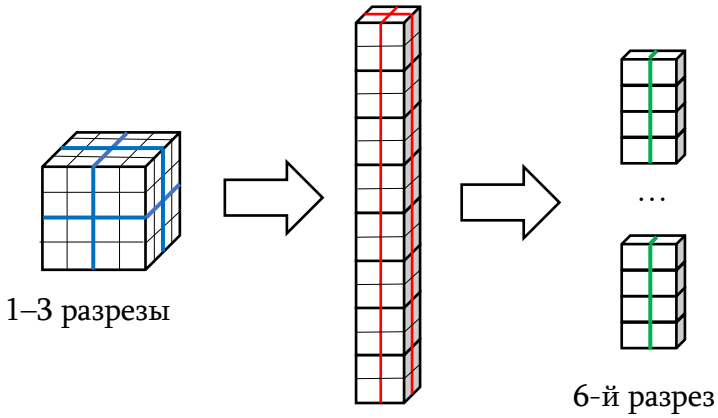
4т*. Скажи «сыыыр»

Раздели шестью прямыми разрезами куб сыра размером 4 × 4 × 4 на кубики размером 1 × 1 × 1. После каждого разреза части можно перекладывать как угодно.

Решение

Сначала разрежем куб тремя разрезами на восемь кубиков 2 × 2 × 2. Поставим их в столбик и разрежем вертикально на параллелепипеды 2 × 2 × 1. Оставив в том же положении, делаем перпендикулярный разрез и получаем параллелепипеды 2 × 1 × 1. Ставим их в столбик 2 × 1 × 32 и одним вертикальным разрезом делим на кубики 1 × 1 × 1.

Запись на доске и в рабочей тетради



Дополнительные задания

5. Девять кубиков

У Темы есть по 9 кубиков одинакового размера синего, зеленого и красного цветов. Помоги ему составить куб из всех этих кубиков так, чтобы в любом ряду из трех кубиков были кубики ровно двух цветов.

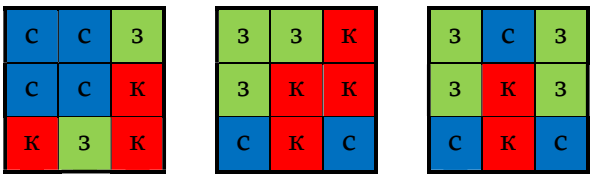
Подсказка

1) Чем отличается условие этой задачи от условия задачи № 3т?

2) Попробуй распределить кубики одного цвета по слоям так, чтобы в одном слое было 4 кубика, в другом — 3 кубика, а в третьем — 2 кубика.

Решение

Один из возможных примеров — на рисунке.



© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute