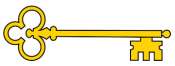
ЗАНЯТИЕ 22. ДЕРЕВО ВОЗМОЖНОСТЕЙ

Учебное содержание

Предметные цели

1. Развить представления о методах подсчета количества вариантов и использовании дерева возможностей при решении комбинаторных задач.
2. Сформировать представления о правиле произведения (правиле «И»), правиле суммы (правиле «ИЛИ»).
3. Расширить область практического применения метода соответствия (разбиения на пары).

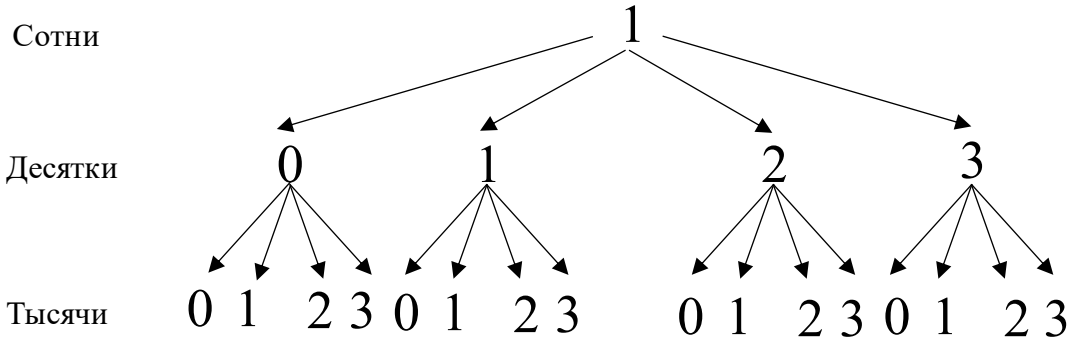
Задача-ключ



Сколько всего трехзначных чисел можно составить, используя только цифры 0, 1, 2 и 3?[1]

Решение

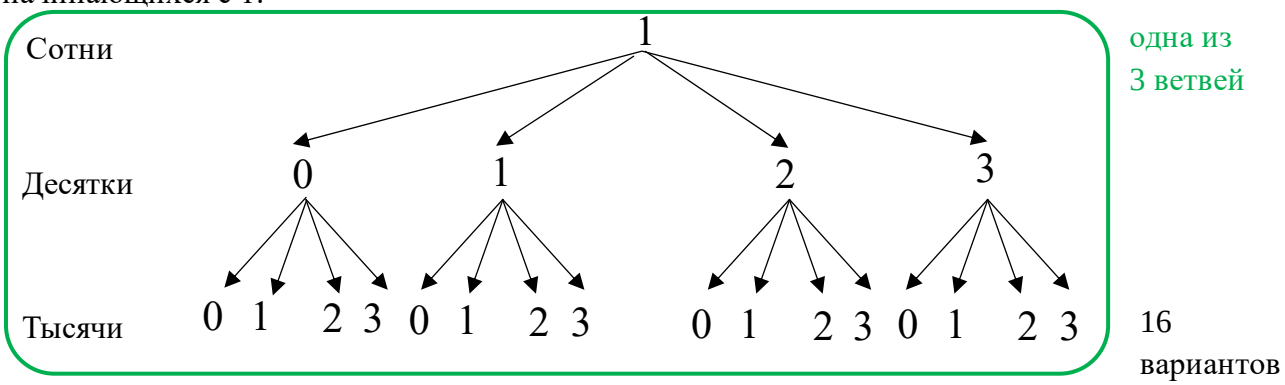
На первом месте (то есть в разряде сотен) в числе может быть любая цифра, кроме 0. Изобразим одну из ветвей дерева возможностей, например, для чисел, начинающихся с единицы:



Каждый путь по дереву возможностей дает свое трехзначное число. Таким образом, из данных цифр можно составить всего 4 · 4 = 16 чисел, начинающихся с цифры 1. Две другие ветви дерева (для чисел, начинающихся с 2 и 3), будут иметь такую же форму, то есть в каждой из них будет также по 16 чисел. Поэтому всего получается 16 · 3 = 48 чисел.

Запись на доске и в рабочей тетради

Трехзначное число не может начинаться с 0. Изобразим ветвь дерева возможностей для чисел, начинающихся с 1:



1) 4 · 4 = 16 (ч.) — в одной из трех ветвей

[1] Так как в условии задачи не сказано, что цифры не могут повторяться, повторы могут быть.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

2) 3 · 16 = 48 (ч.) — всего

Ответ: 48 чисел.

Советы по решению задач на подсчет вариантов

1. Перебор вариантов удобно проводить в некотором порядке (например, при переборе чисел — по возрастанию).
2. Чтобы сосчитать варианты, не перечисляя их все, можно использовать дерево возможностей. Его горизонтальные слои назовем **уровнями**, а части, идущие от одного и того же элемента на первом уровне, — **ветвями**.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. О каких числах идет речь в задаче? Из каких цифр они состоят?
2. На любых ли местах в числе могут встречаться любые из данных цифр? Если нет, то какие есть ограничения?
3. Могут ли цифры повторяться?
4. Удобно ли будет выписать все указанные в условии числа?
5. Как можно изобразить дерево возможностей? Сколько уровней в нем будет? Сколько основных ветвей получится?

Как проверить

Проверить подсчет вариантов можно, выписав все указанные числа, и наоборот.

Основные задания

1. Только раз (5 мин)

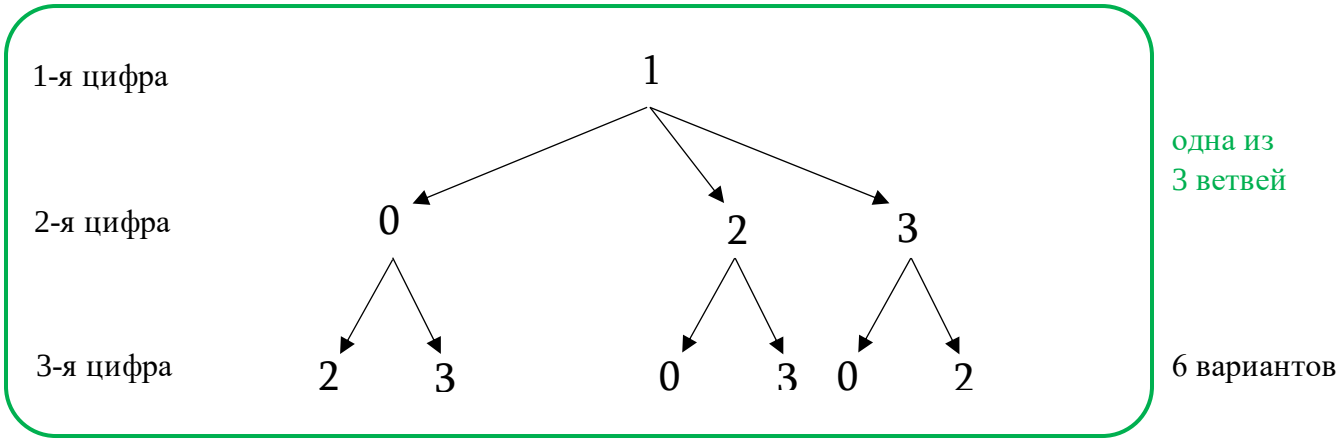
Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, если каждую цифру можно использовать только один раз?

Подсказка

Нарисуй одну из ветвей дерева возможностей. Как меняется число вариантов цифры при переходе от одного уровня к следующему?

Решение

Трехзначное число не может начинаться с 0. Изобразим ветвь дерева возможностей для чисел, начинающихся с 1:



© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Заметим, что на втором месте может быть три варианта цифры (любая из четырех, кроме той, что оказалась на первом месте), а на третьем — два варианта (любая из двух цифр, кроме тех, которые поставили на 1-е и 2-е место). Всего есть три основные ветви (для чисел, начинающихся с 1, 2, 3). Посчитаем:

1) $3 \cdot 2 = 6$ (ч.) — в одной из трех ветвей

2) $3 \cdot 6 = 18$ (ч.) — всего

Ответ: 18 чисел.

Замечание

Полезно будет после обсуждения этой задачи задать вопрос аудитории: «Сколько существует трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, в которых есть повторяющиеся цифры?» Школьники должны отметить, что напрямую подсчитать такое количество будет проблематично, но можно использовать метод дополнения, и получится $48 - 18 = 30$ чисел.

2. Чет и нечет (5 мин)

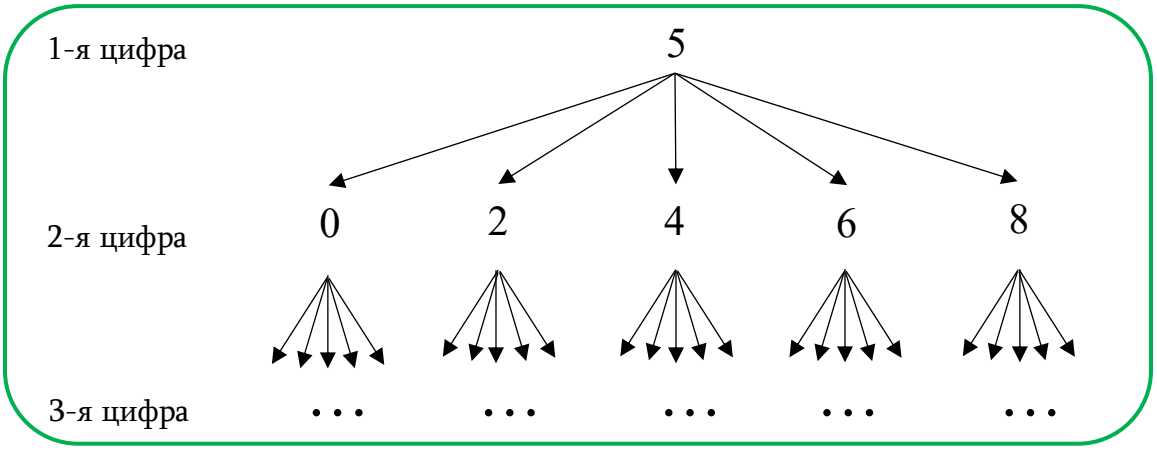
Сколько существует трехзначных чисел, первая цифра которых — 5, вторая цифра — четная, а третья — нечетная?

Подсказка

Подумай, сколько всего вариантов цифр будет на втором и на третьем уровнях дерева возможностей.

Решение

Нарисуем дерево возможностей. Всего существуют 5 четных и 5 нечетных цифр. Цифры по условию могут повторяться, поэтому на 2-ом уровне будет 5 цифр, а также по 5 цифр на 3-м уровне для каждой цифры второго уровня. Нарисуем дерево возможностей:



25 вариантов

$5 \cdot 5 = 25$ (ч.) — всего

Ответ: 25 чисел.

3. Большая разница (5 мин)

Таня выписала все трехзначные числа, в записи которых используются только цифры 1, 3 и 7, а Катя — все трехзначные числа, в записи которых используются только цифры 0, 2 и 6 (цифры в записи могут повторяться). Кто из девочек записал больше чисел и на сколько? Объясни, откуда взялась эта разница.

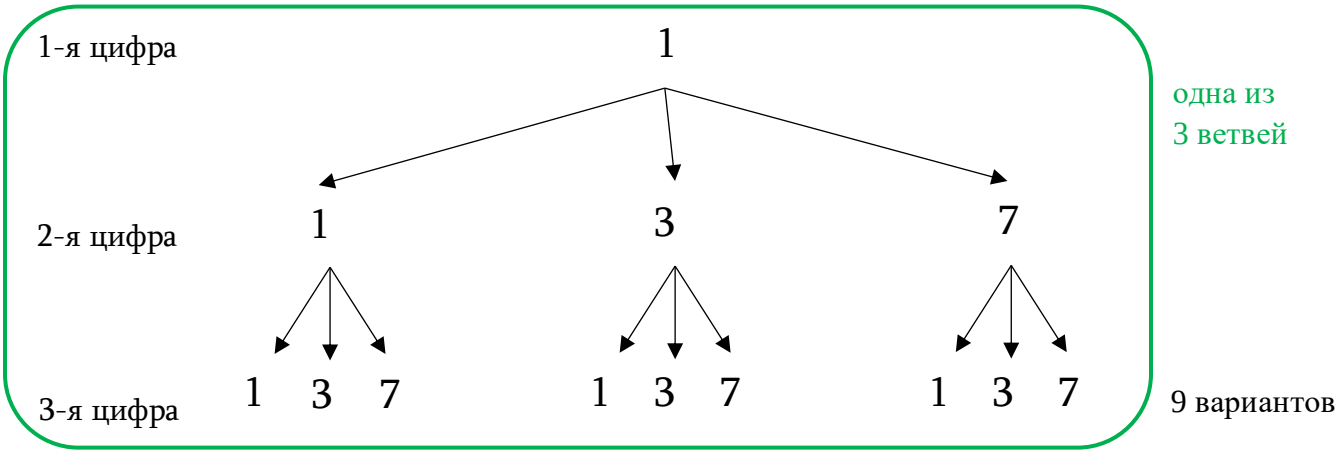
Подсказка

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Каждая ли цифра, использованная девочками, может стоять на первом месте в трехзначном числе?

Решение

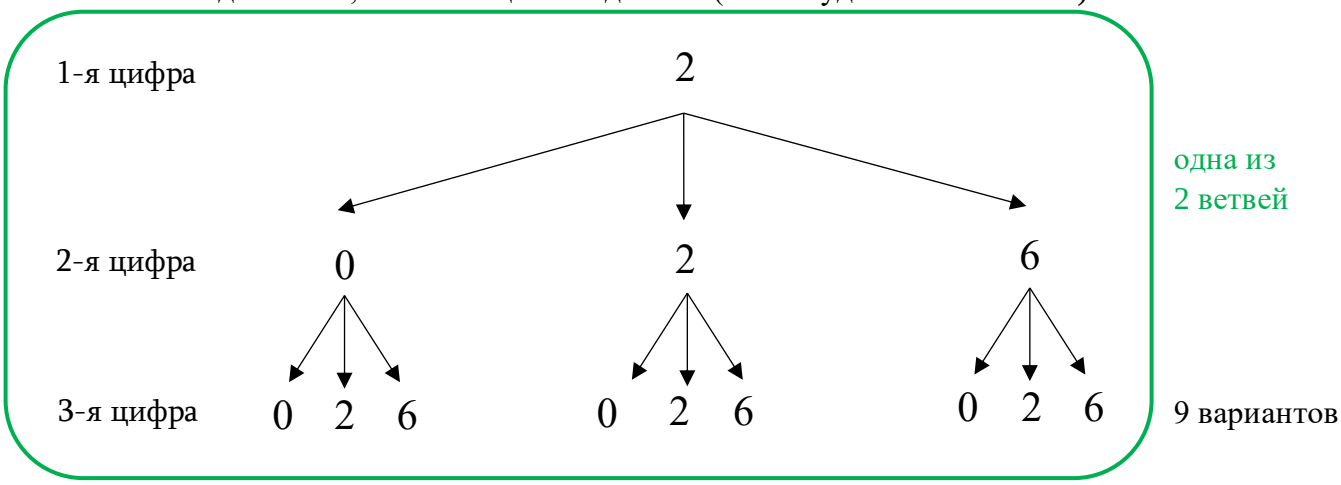
Посчитаем, сколько чисел выписала Таня. Каждое число записано цифрами 1, 3 и 7 (цифры могут повторяться). Нарисуем ветвь дерева возможностей для чисел, начинающихся с единицы (всего будет 3 таких ветви).



1) 3 · 3 = 9 (ч.) — в одной из трех ветвей

2) 3 · 9 = 27 (ч.) — всего записала Таня

Посчитаем, сколько чисел выписала Катя. Каждое число записано цифрами 0, 2 и 6 (цифры могут повторяться). Трехзначное число не может начинаться с 0. Нарисуем ветвь дерева возможностей для чисел, начинающихся с двойки (всего будет 2 таких ветви).



3) 3 · 3 = 9 (ч.) — в одной из двух ветвей

4) 2 · 9 = 18 (ч.) — всего записала Катя

5) 27 – 18 = 9 (ч.) — больше записала Таня

Ответ: Таня записала на 9 чисел больше; Катя выписала меньше чисел, потому что использовала цифру 0.

2-*й способ*

Воспользуемся идеей *соответствия (разбиения на пары)*. Заметим, что если бы девочки записывали не трехзначные числа, а последовательности трех цифр, то они бы записали одинаковое количество последовательностей, потому что любой последовательности, записанной Катей можно поставить «в пару» последовательность, записанную Таней, в которой все цифры на единицу больше:

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

006 ↔ 117, 026 ↔ 137, 062 ↔ 173, …

Из этих последовательностей не являются трехзначными числами те, которые начинаются с цифры «0», и таких последовательностей будет 9: 000, 002, 006, 020, 022, 026, 060, 062, 066. Значит, Таня записала на 9 чисел больше.

4. Шпионская история (5 мин)

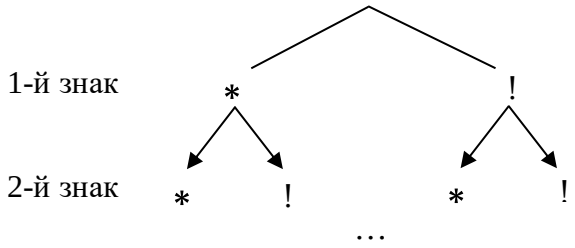
Сыщик Боб придумал зашифровывать символы (буквы и цифры) с помощью знаков «*» и «!». Сколько всего символов сможет зашифровать Боб, если каждый символ кодируется последовательностью из пяти знаков («*» и «!»)?

Подсказка

Из скольких вариантов каждый раз выбирает Боб?

Решение

Боб каждый раз выбирает из двух знаков: ! и *. Таким образом, для каждого выбора предыдущего знака будет два способа выбрать следующий. → После добавления одного знака число вариантов символов удваивается.



$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ (сим.)

Ответ: 32 символа.

5*. В сумме (5 мин)

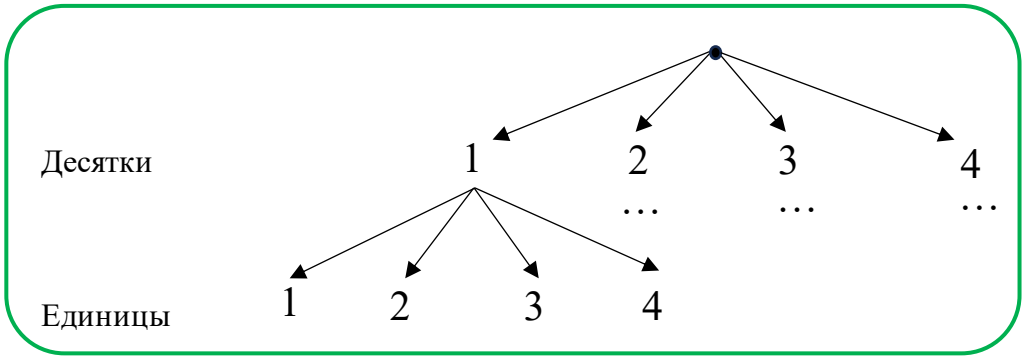
Найди сумму всех двузначных чисел, которые можно записать цифрами 1, 2, 3, 4 (цифры в записи могут повторяться).

Подсказка

Сколько раз цифра 1 встретится в разряде десятков? А в разряде единиц?

Решение

Числа записаны четырьмя цифрами (1, 2, 3 и 4), цифры могут повторяться. Используем для составления этих чисел дерево возможностей.



4 ветви, в них уровень 2 повторяется

4 варианта в каждой ветке

1-*й способ*

Рассмотрим одну ветвь дерева возможностей, например, для чисел, начинающихся с единицы. В этой ветви будет 4 числа: 11, 12, 13, 14. В остальных ветвях также будут по 4 числа,

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

заканчивающиеся на 1, 2, 3 и 4. Значит, на втором уровне (то есть в разряде единиц) 4 раза встретится каждая из цифр 1, 2, 3 и 4.

1) $(1 + 2 + 3 + 4) \cdot 4 = 40$ – сумма единиц во всех числах

Так как в каждой ветви по 4 числа, каждая цифра встретится 4 раза на 1-м месте (то есть в разряде десятков).

2) $(1 + 2 + 3 + 4) \cdot 10 \cdot 4 = 400$ — сумма десятков во всех числах

3) $400 + 40 = 440$

2-й способ

Заметим, что цифра 1 встретится в разряде десятков в 4 числах: 11, 12, 13, 14. Также, она встретится и в разряде единиц в 4 числах: 11, 21, 31, 41. Таким образом, единица дает в общую сумму следующий «вклад»:

1) $4 \cdot 10 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 44$ — «вклад» единиц

То же самое можно сказать и о цифрах 2, 3, 4.

2) $4 \cdot 10 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \cdot 2 = 88$ — «вклад» двоек

3) $4 \cdot 10 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 3 = 132$ — «вклад» троек

4) $4 \cdot 10 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \cdot 4 = 176$ — «вклад» четверок

5) $44 + 88 + 132 + 176 = 440$

3-й способ

Заметим, что для любой из цифр 1, 2, 3, 4 можно составить по четыре числа, начинающихся с этой цифры. Тогда найдем отдельно суммы чисел, начинающихся с определенной цифры:

1) $11 + 12 + 13 + 14 = (11 + 14) + (12 + 13) = 25 \cdot 2 = 50$ — сумма чисел, начинающихся с «1»

2) $21 + 22 + 23 + 24 = (21 + 24) + (22 + 23) = 45 \cdot 2 = 90$ — сумма чисел, начинающихся с «2»

3) $31 + 32 + 33 + 34 = (31 + 34) + (32 + 33) = 65 \cdot 2 = 130$ — сумма чисел, начинающихся с «3»

4) $41 + 42 + 43 + 44 = (41 + 44) + (42 + 43) = 85 \cdot 2 = 170$ — сумма чисел, начинающихся с «3»

5) $50 + 90 + 130 + 170 = 440$

Ответ: 440.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

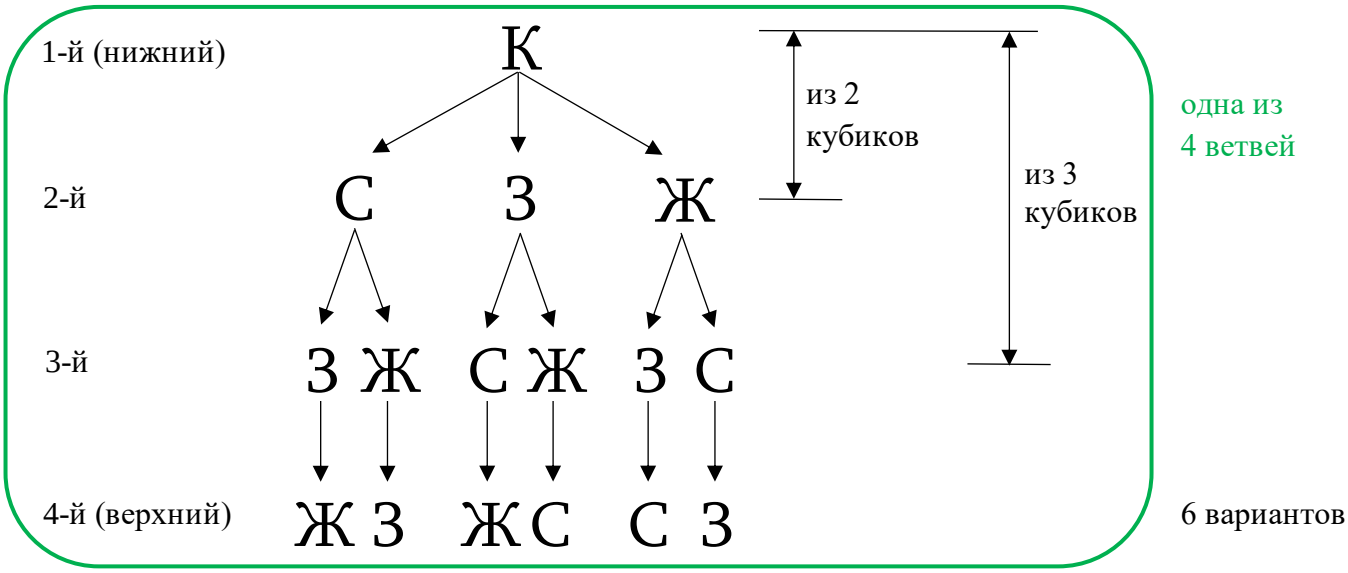
Тренировочные задания

1т. Юный строитель

У Темы есть красный, зеленый, синий и желтый кубики. а) Сколько разных столбиков высотой в четыре кубика он может построить? б) Сколько всего разных столбиков высотой 2, 3 и 4 кубика он может построить?

Решение

а) Столбик состоит из всех 4 кубиков (К, С, З, Ж) без повторений. Нарисуем одну из 4 ветвей дерева возможностей, например ту, где нижний кубик — красный.



1) $2 \cdot 3 = 6$ (ст.) — в одной из 4 ветвей

2) $6 \cdot 4 = 24$ (ст.) — всего

б) Столбик может состоять из 4 кубиков (таких 24), а также из 2 и 3 кубиков. Найдем суммарное количество всех данных столбиков.

1) $3 \cdot 4 = 12$ (ст.) — из 2 кубиков

2) $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 24$ (ст.) — из 3 кубиков

3) $24 \cdot 2 + 12 = 60$ (ст.) — всего

Ответ: а) 24 столбика; б) 60 столбиков.

Замечание

Количество столбиков из 3 кубиков можно найти и по-другому. Оно неспроста равно количеству столбиков из 4 кубиков (хотя кажется, что там-то вариантов должно быть больше!). На самом деле, любая башня из 3 кубиков получается, если убрать один верхний кубик из башни из 4 кубиков. Поэтому башен обоих видов поровну.

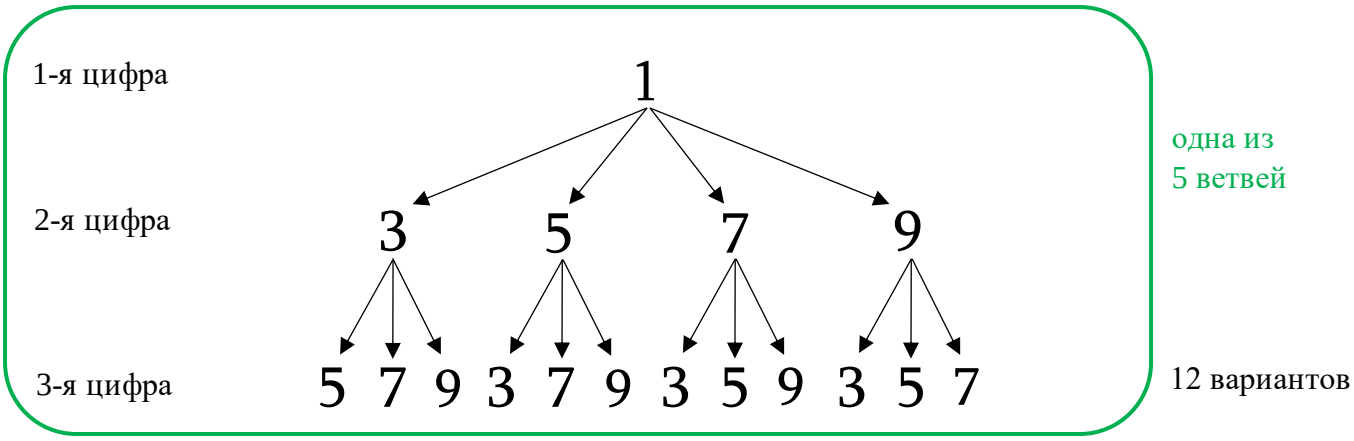
2т. Только нечетные

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9, если каждую цифру можно использовать только один раз?

Решение

Число записано тремя нечетными цифрами без повторений, их пять: 1, 3, 5, 7 и 9. Нарисуем ветвь дерева возможностей для чисел, начинающихся с единицы (всего будет 5 таких ветвей).

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute



1) 4 · 3 = 12 (ч.) — в одной из пяти ветвей

2) 12 · 5 = 60 (ч.)

Ответ: 60 чисел.

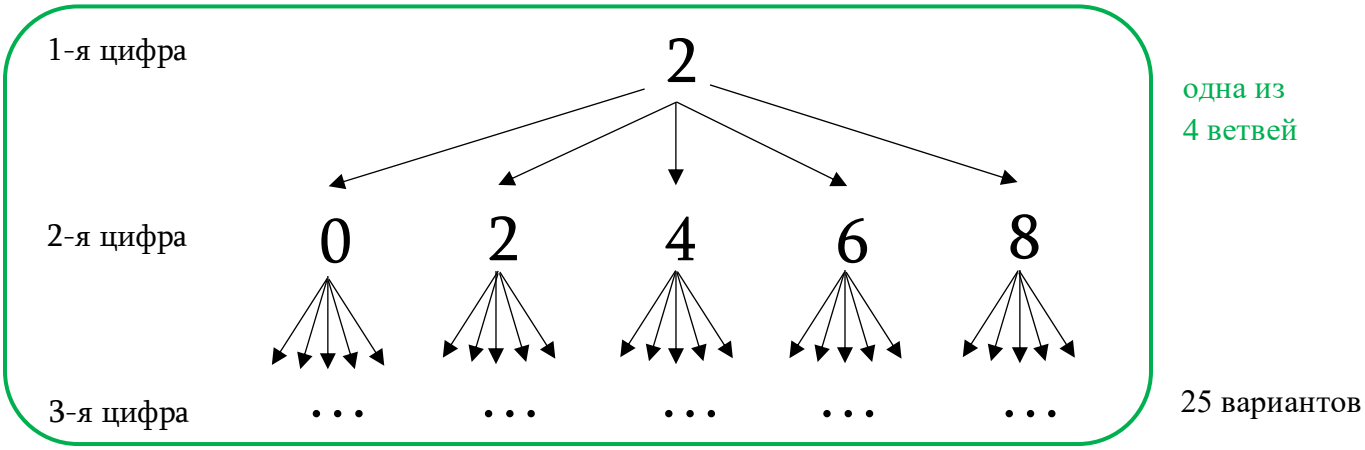
3т. Только четные

Сколько трехзначных чисел можно составить, если использовать только четные цифры? (Цифры в записи числа могут повторяться.)

Решение

Число записано тремя четными цифрами (0, 2, 4, 6, 8 — всего 5 цифр). Цифры могут повторяться. Первая цифра не может быть 0 → Всего 4 варианта первой цифры.

Нарисуем ветвь дерева возможностей для чисел, начинающихся с 2.



1) 5 · 5 = 25 (ч.) — в одной из ветвей дерева

2) 25 · 4 = 100 (ч.) — всего

Ответ: 100 чисел.

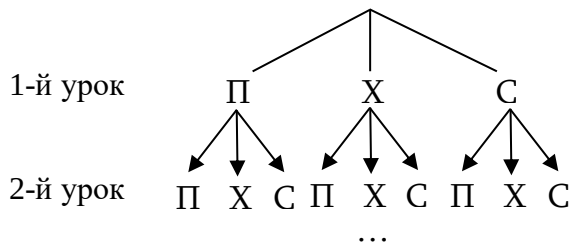
4т. Село Лентяево

В Лентяевской школе есть только уроки пения, храпения и сопения. Сколькими способами в этой школе можно составить расписание из 4 уроков? (Уроки всех видов могут повторяться.)

Решение

Всего в день 4 урока, у каждого урока — 3 варианта (П, Х, С) → После добавления одного урока число вариантов расписания утраивается.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute



$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ (вар.)

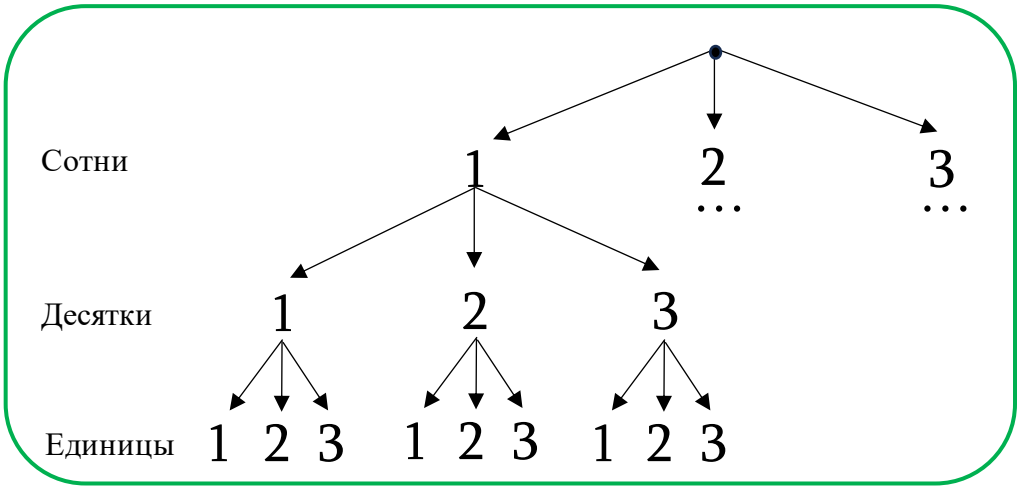
Ответ: 81 вариант.

5т*. В сумме

Найди сумму всех трехзначных чисел, которые можно составить, используя только цифры 1, 2 и 3. (Цифры в записи числа могут повторяться.)

Решение

Числа записаны тремя цифрами (1, 2 и 3), цифры могут повторяться. Используем для составления этих чисел дерево возможностей.



3 ветви, в них уровни 2 и 3 повторяются

9 вариантов в каждой ветке

Найдем сумму сотен, десятков и единиц всех возможных чисел.

1) $(100 + 200 + 300) \cdot 9 = 600 \cdot 9 = 5400$ — сумма всех сотен

2) $(10 + 20 + 30) \cdot 3 \cdot 3 = 540$ — сумма всех десятков

3) $(1 + 2 + 3) \cdot 3 \cdot 3 = 54$ — сумма всех единиц

4) $5400 + 540 + 54 = 5994$

Ответ: 5994.

Дополнительные задания

6. Не подряд

Сколько всего существует четырехзначных чисел, в записи которых нет двух одинаковых цифр, идущих подряд?

Подсказка

Начиная с первой цифры числа, последовательно узнай, сколько есть возможных вариантов для следующей цифры.

Решение

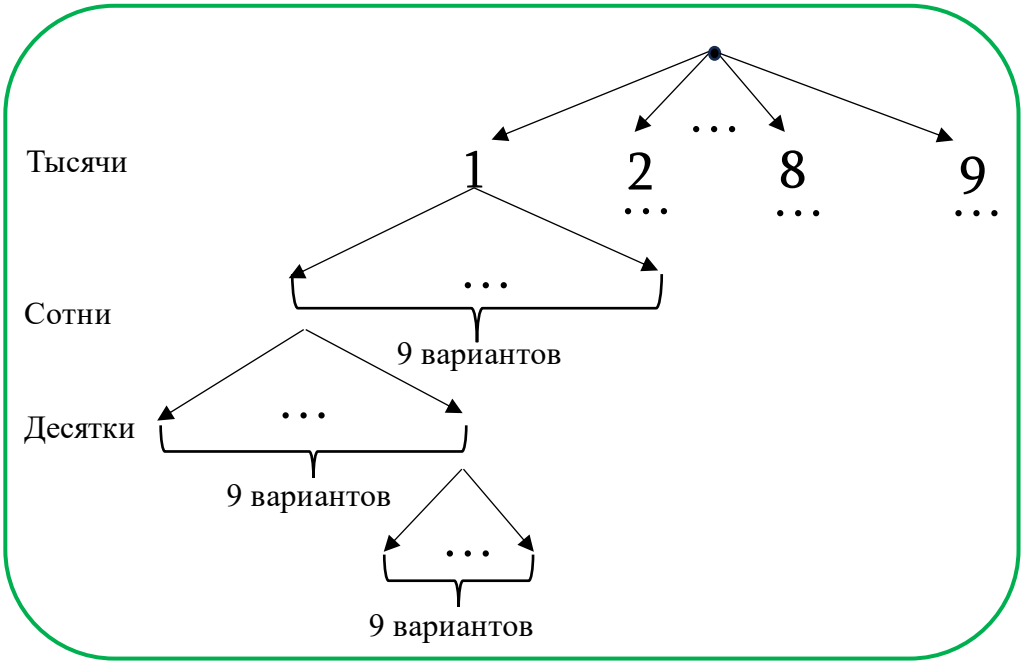
© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

На 1-ом месте в четырехзначном числе может быть любая цифра, кроме 0, то есть всего 9 вариантов 1 цифры.

На 2-ом месте может быть любая цифра, кроме той, что на 1-ом месте. Это 9 вариантов.

На 3-ем месте может быть любая цифра, кроме той, что на 2-ом месте. Это 9 вариантов.

На 4-ом месте может быть любая цифра, кроме той, что на 3-ем месте. Это 9 вариантов.



9 ветвей, на каждом из уровней по 9 вариантов

9 · 9 · 9 вариантов в каждой ветке

Итого, в дереве возможностей для каждого выбора предыдущего варианта есть 9 вариантов выбрать следующий. Получим 9 ветвей, в каждой по 9 · 9 · 9 вариантов. Тогда всего:

9 · 9 · 9 · 9 = 6561 (ч.)

Ответ: 6561 число.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute