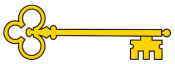
ЗАНЯТИЕ 21. ОБЪЕМНЫЕ ФИГУРЫ

Учебное содержание

Предметные цели

1. Закрепить знания о единицах измерения длины, площади, объема и взаимосвязях между ними.
2. Познакомить со способом изображения объемных фигур, составленных из кубиков, по слоям и его применением при решении задач.

Задача-ключ

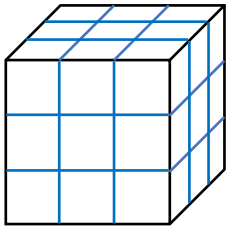


Куб со стороной 3 см разрезали на кубики со стороной 1 см. Сколько всего кубиков получилось?

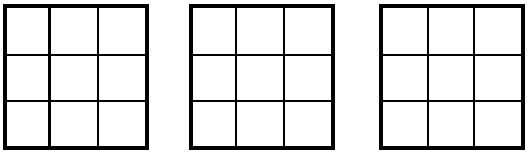
Решение

1-й способ

Изобразим куб и разрезы на нем. Посчитаем количество кубиков.



Изобразим куб разрезанным по слоям толщиной в 1 см (верхний, средний, нижний):



Получается 3 слоя по $3 \cdot 3 = 9$ кубиков, то есть всего $3 \cdot 9 = 27$ кубиков.

2-й способ (объем)

1) $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ (см^3) — объем куба

2) $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ (см^3) — объем одного кубика

3) $27 : 1 = 27$ (к.)

Ответ: 27 кубиков.

Советы по решению задач про объемные фигуры

1. Фигуру, составленную из кубиков, можно изобразить в разрезах по слоям (в том числе горизонтальным).
2. Помни, что у куба 8 вершин, 6 граней и 12 ребер.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. О каких объемных фигурах идет речь в задаче? Как их можно удобно изобразить?
2. Какие удобные части можно выделить в этих фигурах?

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

3. Полезно ли найти объем фигур?

Как проверить

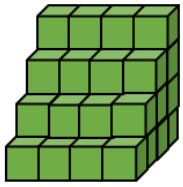
1. Для проверки можно изготовить модели фигур, о которых идет речь в условии задачи, из подручных материалов (кубиков, пластилина, бумаги, и так далее) и убедиться в выполнении требований задачи.

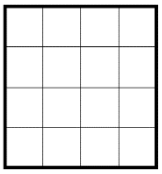
2. Если в задаче идет речь о «больших» объектах, которые сложно изготовить, можно произвести проверку на «малых случаях», нарисовав или изготовив модель с меньшим числом элементов.

Основные задания

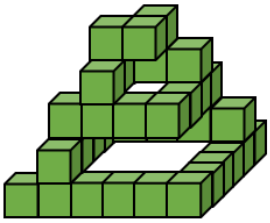
1. Пирамидки (4 мин)

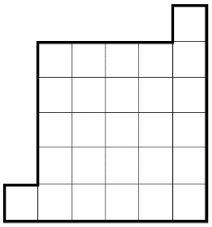
Наташа склеила из кубиков две пирамидки (см. рисунки). На какую из них ушло больше кубиков?





Пирамидка А (вид сверху)





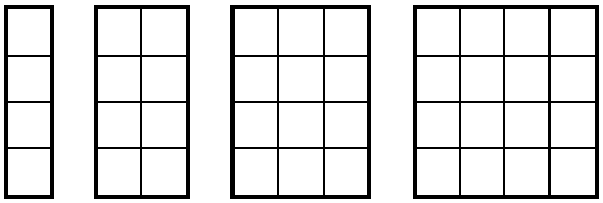
Пирамидка Б (вид сверху)

Подсказка

Начни «разбирать» пирамидки с верхнего слоя.

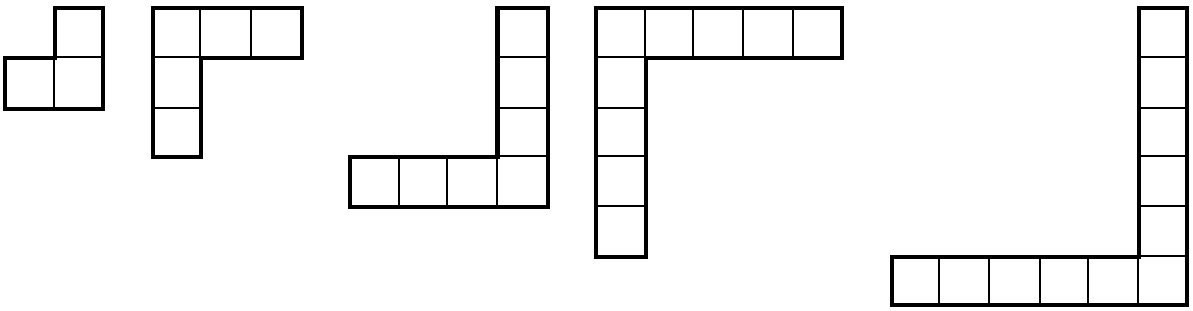
Решение

1) Пирамидка А (по слоям от верхнего к нижнему):



$1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 40$ (к.) – в пирамидке *А*

2) Пирамидка Б (по слоям от верхнего к нижнему):



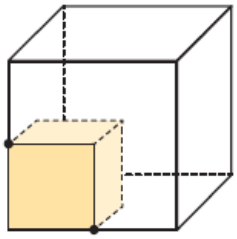
$3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 35$ (к.) – в пирамидке *Б*

$40 > 35 \Rightarrow$ Больше кубиков ушло на пирамидку *А*.

Ответ: на пирамидку *А*.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

2. Бесплатный сыр (5 мин)



Мышка нашла куб своего любимого сыра и ела его в течение семи дней. прошли, оказалось, что все три измерения куба — длина, ширина и высота — ровно вдвое. На сколько дней мышке хватит оставшегося сыра, если каж съедает сыра поровну?

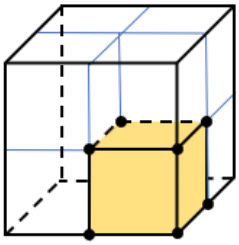
Подсказка

Раздели куб на маленькие кубики (см. рис. к задаче). Сколько их?

Решение

1-*й способ*

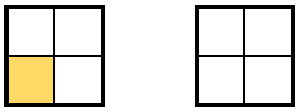
Изобразим куб сыра. Покажем внутри него остаток, у которого длина, ширина и высота вдвое меньше.



Заметим, что в один слой помещается 4 таких кубика, значит в два слоя — 8 кубиков. За 7 дней мышка съела 8 – 1 = 7 кубиков, а значит, она съедает 7 : 7 = 1 кубик за день. Получается, что оставшегося куска хватит на 1 день.

2-*й способ*

Разделим куб сыра пополам горизонтальным разрезом. Получим два слоя — верхний и нижний. При этом высота слоя будет равна длине стороны оставшегося куба, а длина и ширина — вдвое больше.



Тогда каждый слой можно поделить на 4 кубика такого размера, как оставшийся, а исходный куб состоял из 8 таких кубиков.

За 7 дней мышка съела 8 – 1 = 7 кубиков, а значит, она съедает 7 : 7 = 1 кубик за день. Получается, что оставшегося куска хватит на 1 день.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) 4 · 2 = 8 (к.) — всего в кубе

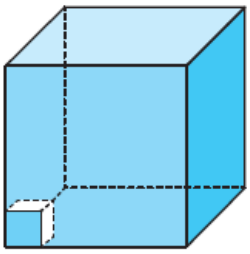
2) 8 – 1 = 7 (к.) — съела мышка

3) 7 : 7 = 1 (к./д.) — съедает мышка

4) 1 : 1 = 1 (д.)

Ответ: на 1 день.

3. Раскрашенные грани (5 мин)



Из белых кубиков с ребром, равным 1 дм, сложили большой куб с ребром 12 дм и покрасили его поверхность в голубой цвет. У скольких маленьких кубиков теперь: а) ровно одна голубая грань; б) нет голубых граней?

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

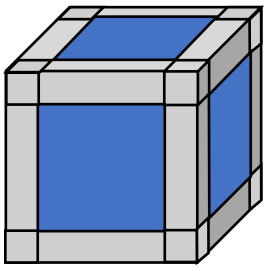
Подсказка к пункту а)

Рассмотри одну грань куба. Сколько кубиков с одной окрашенной гранью расположено вдоль нее?

Подсказка к пункту б)

Что останется, если убрать все кубики с окрашенными гранями?

Решение



а) Рассмотрим окрашенную поверхность куба. На каждой из его 6 граней есть квадрат со стороной 10 дм, образованный гранями кубиков, у которых окрашена только одна эта грань (см. рисунок).

У других кубиков либо окрашено больше граней, либо грани вообще не окрашены. Значит, всего $10 \cdot 10 \cdot 6 = 600$ кубиков с одной окрашенной гранью.

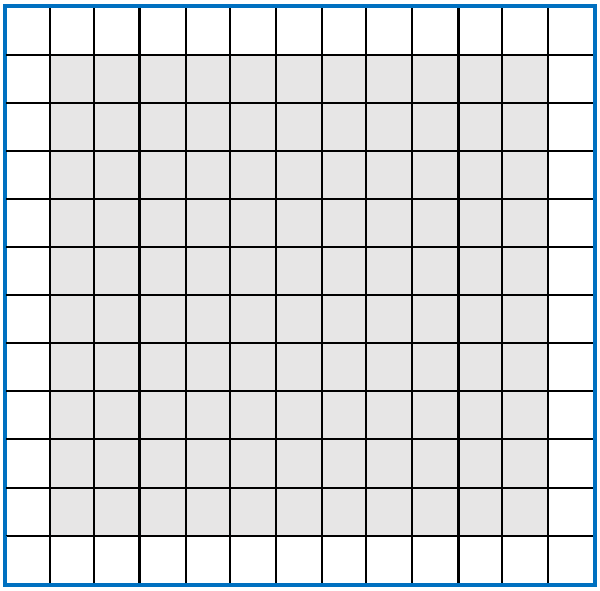
б) 1-*й способ*

Воспользуемся приемом «учти лишнее». Нет окрашенных граней у кубиков, которые не являются граничными (то есть грани которых не находятся на границе куба). Если убрать все эти «лишние» граничные кубики, то останется куб с ребром 10 дм, состоящий только из кубиков без окрашенных граней. Значит, всего $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ кубиков, у которых нет окрашенных граней.

2-*й способ*

Разрежем куб горизонтальными разрезами на 12 слоев. Заметим, что у всех кубиков верхнего слоя и у всех кубиков нижнего слоя есть хотя бы одна окрашенная грань (верхняя и нижняя соответственно).

Изобразим любой из промежуточных слоев (кроме верхнего и нижнего):



На рисунке серым цветом отмечены кубики, у которых не окрашена ни одна грань. Всего получим $10 \cdot (10 \cdot 10) = 1000$ таких кубиков.

Запись на доске и в рабочей тетради

С 1 окрашенной гранью: на каждой грани – $10 \cdot 10$ кубиков, значит всего $10 \cdot 10 \cdot 6 = 600$ (к.)

Без окрашенных граней (0): убрав все покрашенные кубики, получим куб с ребром $12 – 2 = 10$, его объем — $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ (к.)

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Ответ: а) 600 кубиков; б) 1000 кубиков.

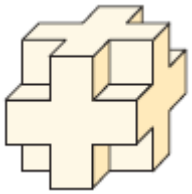
4*. Куб из кубиков (5 мин)

Куб с длиной стороны 10 см состоит из 27 одинаковых маленьких кубиков. Из кубика вынули все «угловые» кубики. а) На сколько изменилась его площадь поверхности? б) Попробуй изобразить получившуюся фигуру.

Подсказка

Рассмотри грани, сходящиеся в одном углу куба. Что можно сказать о них после доставания кубиков? Какие грани «добавляются»?

Решение



а) У углового кубика три грани «смотрят наружу». Когда кубик убрали, из общей площади поверхности вычитается площадь этих трех граней, но добавляется площадь трех новых граней, которые «смотрят наружу». Значит, площадь поверхности не изменится.

б) Смотри рисунок.

Ответ: а) площадь не изменилась; б) см. рис.

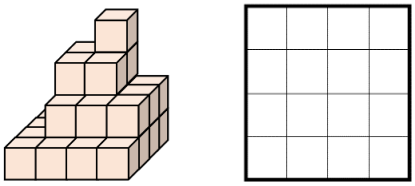
Замечание

Теоретически задачу можно решить, вычислив явно площади поверхности исходного куба и новой фигуры. Однако числа в задаче подобраны таким образом, что длины сторон маленьких кубиков — нецелые числа, поэтому данный способ использовать нерационально.

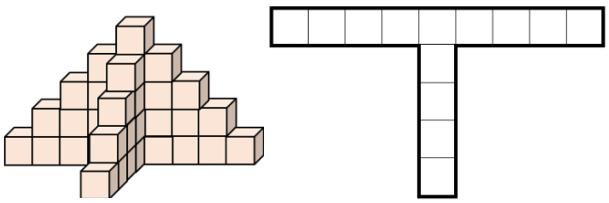
Тренировочные задания

1т. Пирамидки (4 мин)

Глаша построила из кубиков сахара две пирамидки (см. рисунки). На какую ушло больше кубиков?



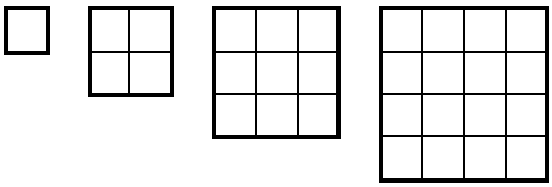
Пирамидка А (вид сверху)



Пирамидка Б (вид сверху)

Решение

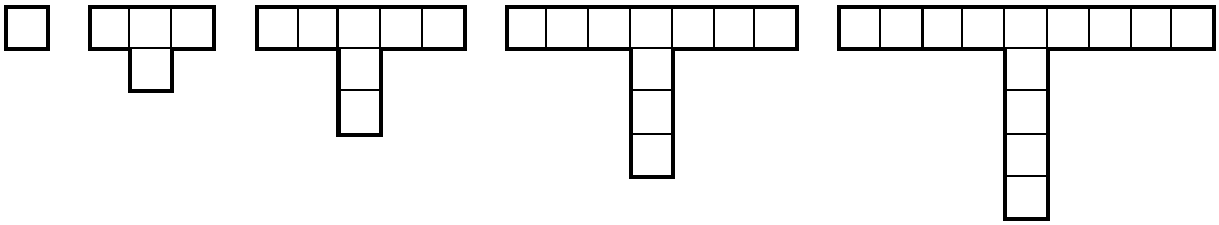
1) Пирамидка А (по слоям от верхнего к нижнему):



1 + 4 + 9 + 16 = 30 (к.) — в пирамидке *А*

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

2) Пирамидка Б (по слоям от верхнего к нижнему):

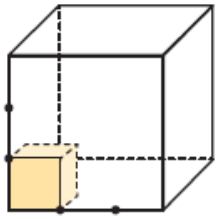


1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35 (к.) — в пирамидке *Б*

3) 30 < 35 ⇒ Больше кубиков ушло на пирамидку *Б*.

Ответ: на пирамидку *Б*.

2т. Бесплатный сыр



Мыши заготовили на зиму куб сыра со стороной 3 м. На сколько зим им бы хватило куба сыра со стороной 9 м?

Решение

1-й способ

1) 9 : 3 = 3 (к.) — вдоль ребра

2) (3 • 3) • 3 = 27 (к.) — всего в кубе

3) 27 : 1 = 27 (зим)

2-й способ

$V_{б.} = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ (м^3)

$V_{м.} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ (м^3)

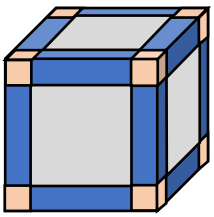
$V_{б.} : V_{м.} = 729 : 27 = 27$ (зим)

Ответ: на 27 зим.

3т. Раскрашенные грани

Из белых кубиков с ребром 1 дм сложили большой куб с ребром 12 дм и покрасили его поверхность в голубой цвет. Сколько теперь маленьких кубиков с 3, 2, 1, 0 голубыми гранями?

Решение



3 грани окрашены только у угловых кубиков, которых 8 штук.

2 грани окрашены у кубиков, находящихся вдоль ребер куба (кроме угловых кубиков). Таких по 10 на каждом ребре, то есть всего 12 · 10 = 120 кубиков.

1 грань окрашена у всех остальных наружных кубиков. Таких по (12 – 2) · (12 – 2) на каждой грани. Значит всего их (12 – 2) · (12 – 2) · 6 = 600 кубиков.

0 граней покрашено у кубиков, которые находятся «внутри». Если убрать все покрашенные кубики, то останется куб с ребром 12 – 2 = 10 кубиков, его объем — 10 · 10 · 10 = 1000 кубиков.

Запись на доске и в рабочей тетради

С 3 голубыми гранями — 8 (угловых) кубиков.

С 2 голубыми гранями (вдоль каждого ребра): (12 – 2) · 12 = 120 (к.)

С 1 голубой гранью (на каждой грани): (12 – 2) · (12 – 2) · 6 = 600 (к.)

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Без голубых граней (0): убрав все покрашенные кубики, получим куб с ребром 12 – 2 = 10, его объем — 10 · 10 · 10 = 1000 (к.)

Ответ: 8, 120, 600, 1000 кубиков.

Замечание

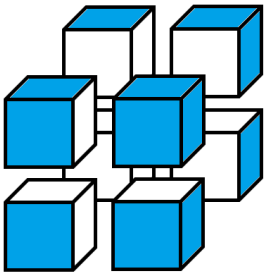
Для проверки ответа можно найти сумму кубиков всех видов и сравнить ее с объемом куба.

4т*. Добавь краски

Из 8 одинаковых белых кубиков сложили куб и покрасили поверхность в синий цвет, потратив 5 г краски. Затем куб снова разобрали. Сколько граммов краски нужно, чтобы докрасить оставшиеся грани кубиков?

Решение

У каждого кубика всего 3 белых и 3 синих грани ⇒ Покрашена половина всех граней ⇒ Нужно еще 5 г краски.

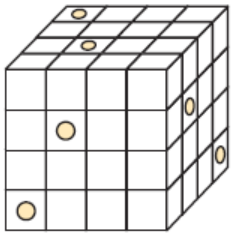


Ответ: 5 г.

Дополнительные задания

5. Сквозь кубики

Большой куб склеен из маленьких деревянных кубиков (см. рис.). В нем просверлили 6 сквозных отверстий, параллельных ребрам. Сколько осталось неповрежденных маленьких кубиков?



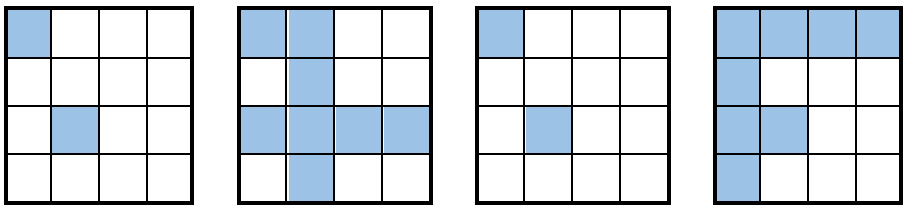
Подсказка

Изобрази куб по слоям и отметь кубики с отверстиями.

Решение

1-*й способ*

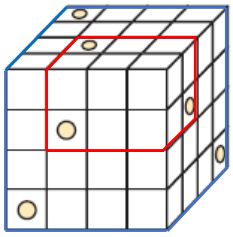
Разрежем кубик по слоям (от верхнего к нижнему) и покажем на них цветом те, через которые прошло сверло. Посчитаем число неповрежденных кубиков.



© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

(16 – 2) · 2 + 8 · 2 = 28 + 16 = 44 (к.)

2-й способ



Используем метод дополнения и сначала посчитаем количество кубиков, которые оказались поврежденными. Для вычисления количества поврежденных кубиков используем прием «учти лишнее». Заметим, что, так как отверстия сквозные, каждое из них проходит через один ряд из 4 кубиков.

Если не учитывать кубики, в которых окажется сразу несколько отверстий, то всего получится 6 · 4 = 24 поврежденных кубика. При этом пересекаться будут только три отверстия в дальних углах отмеченных на рисунке двух параллелепипедах:

Каждое пересечение таких трех отверстий мы учли в сумме (24) трижды (по разу на каждое отверстие). Два из этих пересечений «лишние».

1) 24 – 2 · 2 = 20 (к.) — поврежденных

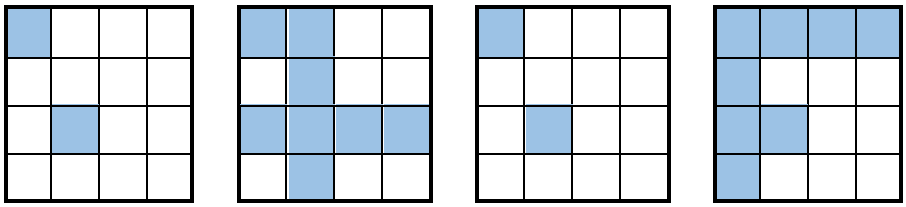
2) 4 · 4 · 4 = 64 (к.) — всего в большом кубе

3) 64 – 20 = 44 (к.)

Запись на доске и в рабочей тетради

1-й способ

Кубик по слоям (от верхнего к нижнему):



(16 – 2) · 2 + 8 · 2 = 28 + 16 = 44 (к.)

2-й способ

2 поврежденных кубика просверлены 3 раза, остальные – по 1 разу

1) 24 – 2 · 2 = 20 (к.) — поврежденных кубиков

2) 4 · 4 · 4 = 64 (к.) — всего в большом кубе

3) 64 – 20 = 44 (к.)

Ответ: 44 кубика.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute