# ЗАНЯТИЕ 19. СТРОЙ СТРАТЕГИЮ!

# Учебное содержание

# Предметные цели

- 1. Познакомить с понятием выигрышной стратегии в математических играх.
- 2. Формировать представления об использовании дерева возможностей для доказательства верного выбора стратегии.
- 3. Формировать представления о выигрышных и проигрышных позициях в математических играх.

#### Задача-ключ

В корзине лежит 6 слив. Петя и Валя по очереди достают сливы из корзины (начинает Петя). За один раз можно достать 1, 2 или 3 сливы. Выигрывает тот, кто достал последнюю сливу. У кого из ребят есть выигрышная стратегия?

#### Решение

Опишем стратегию, по которой первый игрок (Петя) может выиграть вне зависимости от игры второго игрока (Вали). Пусть Петя своим первым ходом достанет две сливы. Тогда в корзине останется 4 сливы, а после хода Вали может остаться 3, 2 или 1 слива. Тогда своим вторым ходом Петя может достать все оставшиеся сливы из корзины и выиграть.

### Запись на доске и в рабочей тетради

*Стратегия Пети:* взять 2 сливы, а забрать оставшиеся после хода Вали *Обоснование стратегии:* 

 $\Pi: 6-2=4$ 

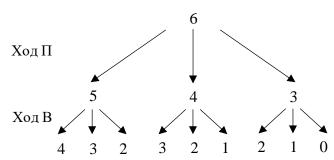
B: 4 - (1, 2, 3) = (3, 2, 1)

 $\Pi$ : (3, 2, 1) – (3, 2, 1) = 0 (выигрыш)

Ответ: у первого игрока.

### Путь к решению

Изобразим дерево возможностей для первых двух ходов. В вершинах дерева будем изображать количество слив, оставшееся после соответствующего хода.



Заметим, что если Петя оставит Вале 3 сливы, то та выиграет своим ходом. Если Петя оставит 5 слив, то игра продолжится после хода Вали. Если Петя оставит Вале 4 сливы, то при любых его ходах останется то число слив, которое может достать Петя за один раз. Значит, выигрышная стратегия есть у Пети (эта стратегия и описана в решении задачи).

# Советы по поиску стратегий в математических играх

Выигрышной стратегией для игрока называется последовательность действий, которая приводит к его выигрышу вне зависимости от игры соперника.

- 1. Для того чтобы найти выигрышную стратегию и обосновать ее, можно воспользоваться перебором вариантов. Это удобно, если вариантов немного.
- 2. Перебор можно провести с помощью дерева возможностей.

## Вопросы для построения подводящего диалога

- 1. Что меняется за ход в этой игре?
- 2. Какая позиция может быть в игре после первого хода? А после второго?
- 3. Из каких позиций можно выиграть за один ход?

## Как проверить

Для проверки правильности выбранной стратегии за некоторого игрока можно провести полный перебор вариантов ходов другого игрока.

# Комментарий к занятию

В этом занятии Петя и Валя играют в математические игры. Они ходят по очереди, причем Петя всегда первый ( $\Pi$ ), а Валя — вторая (B).

#### Основные задания

# 1. Сложение (3 мин)

Записано число 1. Двое по очереди пишут новое число, увеличивая записанное перед этим на 1, 2, 3, 4 или 5. Выигрывает тот, кто напишет число 10. У кого из двоих играющих есть выигрышная стратегия?

#### Подсказка

Подумай, какое число должно быть записано на доске, чтобы можно было выиграть за один ход.

### Решение

Пусть  $\Pi$  своим первым ходом прибавит к числу на доске 3. Сумма равна 4. После хода B на доске может оказаться любое число от 5 до 9 включительно, а значит,  $\Pi$  сможет добавить 5, 4, 3, 2 или 1 и выиграть.

### Запись на доске и в рабочей тетради

*Стратегия*  $\Pi$ : первым ходом записать число 4, а дальше дополнить число, записанное B, до 10 *Обоснование стратегии*:

$$\Pi: 1 + 3 = 4$$

B: 
$$4 + (1, 2, 3, 4, 5) = (5, 6, 7, 8, 9)$$

$$\Pi$$
: (5, 6, 7, 8, 9) + (5, 4, 3, 2, 1) = 10 (выигрыш)

Ответ: у первого игрока.

### Путь к решению

 $\Pi$  сможет выиграть за 1 ход, если B запишет любое число от 5 до 9. Чтобы получить такую ситуацию,  $\Pi$  достаточно записать число 4 — он может это сделать одним ходом.

# 2. Не повторяйся! (4 мин)

Записано число 6. Два игрока по очереди пишут новое число, увеличивая записанное перед этим на 1 или деля его на 2 (если число было четным). Проигрывает тот, кто напишет число, которое уже было записано ранее. У кого из двух игроков есть выигрышная стратегия?

#### Подсказка

Для каких чисел, записанных на доске, у игрока имеется только один вариант очередного хода?

#### Решение

Пусть П первым ходом поделит свое число на 2, получится 3. Число нечетное, и В придется прибавить к нему единицу. Получится 4. Дальше П прибавляет к числу 1, и остается число 5. Число нечетное, и В придется прибавить к нему единицу, получится 6, а такое число уже было на доске.

# Запись на доске и в рабочей тетради

*Стратегия*  $\Pi$ : первым ходом записать число 3, а затем всегда добавлять по 1.

Обоснование стратегии:

 $\Pi: 6: 2=3$ 

B: 3 + 1 = 4 (единственный ход)

 $\Pi: 4 + 1 = 5$ 

B: 5 + 1 = 6 (единственный ход, проигрыш)

Ответ: у первого игрока.

### Путь к решению

Можно постараться оставить после своего хода число, из которого за 1 ход получаются только уже записанные числа (например, из 5 можно получить только 6).

#### Замечание

В этой задаче есть и другие подходящие стратегии для Пети.

# 3. Сотня (4 мин)

Записано число 100. Двое по очереди пишут новое число, деля записанное перед этим на 2, 5 или 10 (если число делится нацело). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого есть выигрышная стратегия?

#### Подсказка

Игрок, который оставит сопернику после своего хода число 4, выигрывает. Есть ли еще такие «хорошие» позиции в игре?

#### Решение

 $\Pi$  первым ходом может получить числа 50, 20 или 10. Тогда В своим ходом запишет 25, 4 или 1 соответственно. Если В запишет число 1, то Петя проиграет. Если осталось число 25, то  $\Pi$  сможет записать только число 5. Тогда В поделит его на 5, и останется число 1, а значит  $\Pi$  проиграет. Если осталось число 4, то  $\Pi$  сможет записать только число 2. Тогда В поделит его на 2, и останется число 1, а значит  $\Pi$  проиграет.

### Запись на доске и в рабочей тетради

Стратегия В: оставить после своего хода на доске одно из чисел 25, 4, 1.

Обоснование стратегии:

 $\Pi$ : 100 : (2, 5, 10) = (50, 20, 10)

ІІступень. Занятие 19. Строй стратегию!

B: (50, 20, 10) : (2, 5, 10) = (25, 4, 1)

Если осталось число 1, Петя проиграл. Если нет:

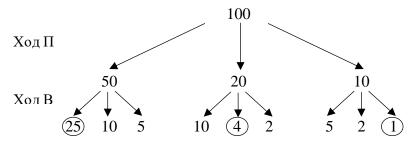
 $\Pi$ : (25, 4): (5, 2) = (5, 2)

B: (5, 2): (5, 2) = 1 (Петя проиграл)

Ответ: у второго игрока.

# Путь к решению

Нарисуем дерево возможностей для первых двух ходов.



Приведем выигрышную стратегию для В. Для каждой ветки обведем в кружок то число, которое будет получать В. Если после его хода останется число 25, то П будет вынужден поделить его на 5, и В выиграет следующим ходом. Если после его хода останется число 4, то П будет вынужден поделить его на 2, и В выиграет.

# **4\*.** Хитрые сливы (5 мин)

В корзине лежат 10 слив. Двое по очереди достают из нее сливы. За один раз можно достать 1, 2 или 3 сливы. Выигрывает тот игрок, кто достанет последнюю сливу. У кого есть выигрышная стратегия?

### Подсказка

Объясни, почему игрок, оставивший после своего хода сопернику 4 сливы, может выиграть, какой бы ход ни сделал соперник. Есть ли еще такие «хорошие» позиции в игре?

#### Решение

Пусть П первым ходом возьмет 2 сливы, тем самым оставив В 8 слив. Тогда после хода В может остаться 7, 6 или 5 слив. Тогда П может забрать 3, 2 или 1 сливу так, чтобы В осталось 4 сливы. Как было разобрано в примере, Петя в этой ситуации выигрывает.

### Запись на доске и в рабочей тетради

*Стратегия*  $\Pi$ : уменьшать число слив до числа, кратного 4.

Обоснование стратегии:

 $\Pi: 10 - 2 = 8$ 

B: 8 - (1, 2, 3) = (7, 6, 5)

 $\Pi$ : (7, 6, 5) – (3, 2, 1) = 4

B: 4 - (1, 2, 3) = (3, 2, 1)

 $\Pi$ : (3, 2, 1) – (3, 2, 1) = 0 (выигрыш)

Ответ: у первого игрока.

### Путь к решению

Выигрыш  $\Pi$  будет обеспечен, если перед последним его ходом останется 4 сливы. Чтобы получилась такая ситуация,  $\Pi$  достаточно оставить после предыдущего хода 4+4=8 слив.

# Тренировочные задания

#### 1т. Сложение

Записано число 1. Двое по очереди пишут новое число, увеличивая записанное перед этим на 1, 2, 3, 4 или 5. Выигрывает тот, кто напишет число 12. У кого есть выигрышная стратегия?

#### Решение

Пусть  $\Pi$  своим первым ходом прибавит к числу на доске 5. Сумма равна 6. После хода B на доске может оказаться любое число от 7 до 11 включительно, а значит,  $\Pi$  сможет добавить 5, 4, 3, 2 или 1 и выиграть.

### Запись на доске и в рабочей тетради

Стратегия  $\Pi$ : первым ходом записать число 6, а дальше дополнить число, записанное B, до 12 Обоснование стратегии:

$$\Pi: 1 + 5 = 6$$

B: 
$$6 + (1, 2, 3, 4, 5) = (7, 8, 9, 10, 11)$$

$$\Pi$$
: (7, 8, 9, 10, 11) + (5, 4, 3, 2, 1) = 12 (выигрыш)

Ответ: у первого игрока.

### Путь к решению

П сможет выиграть за 1 ход, если В запишет любое число от 7 до 11. Чтобы получить такую ситуацию, П достаточно записать число 6 — он может это сделать одним ходом.

# 2т. Не повторяйся!

Записано число 10. Двое по очереди пишут новое число, увеличивая записанное перед этим на 1 или деля его на 2 (если оно четное). Проигрывает тот из игроков, кто напишет число, которое уже было записано ранее. У кого есть выигрышная стратегия?

#### Решение

Пусть П первым ходом поделит число на 2, получится 5. В будет обязан прибавить к числу 1, получится 6. Теперь П добавляет 1, получается 7. В обязан прибавить 1, получается 8. П прибавляет 1, и получается число 9. В должен прибавить 1 и написать число 10, которое уже было на доске.

# Запись на доске и в рабочей тетради

*Стратегия*  $\Pi$ : первым ходом записать число 5, а затем всегда добавлять по 1.

Обоснование стратегии:

$$\Pi: 10: 2=5$$

$$B: 5 + 1 = 6$$
 (единственный ход)

$$\Pi$$
: 6 + 1 = 7

$$B: 7 + 1 = 8$$
 (единственный ход)

$$\Pi: 8 + 1 = 9$$

$$B: 9 + 1 = 10$$
 (единственный ход, проигрыш)

Ответ: у первого игрока.

### Путь к решению

ІІступень. Занятие 19. Строй стратегию!

Можно постараться оставить после своего хода число, из которого за 1 ход получаются только уже записанные числа (например, из 9 можно получить только 10).

#### Замечание

Есть и другие варианты стратегии для первого игрока.

# 3т. Раздели и выиграй!

Записано число 64. Двое по очереди пишут новое число, деля записанное перед этим на 2 или 4 (если делится нацело). Проигрывает тот, кто запишет 1. У кого есть выигрышная стратегия?

### Решение

Пусть  $\Pi$  запишет число 16, тогда B придется записать либо число 8, либо число 4. Тогда  $\Pi$  следующим своим ходом запишет число 2, и у B придется записать число 1, а значит  $\Pi$  выиграет.

### Запись на доске и в рабочей тетради

Стратегия  $\Pi$ : первым ходом поделить число на 4, оставляя сопернику 16, а после следующего своего хода оставить 2.

Обоснование стратегии:

 $\Pi: 64: 4=16$ 

B: 16:(2,4)=(8,4)

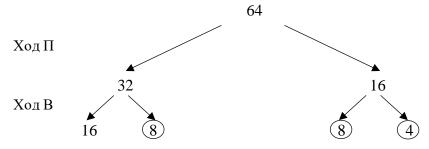
 $\Pi$ : (8, 4): (2, 4) = 2

B: 2: 2 = 1 (единственный ход; проигрыш)

Ответ: у первого игрока.

## Путь к решению

Нарисуем дерево возможностей для первых двух ходов.



Если оставить сопернику число 2, то он проиграет. Число 2 можно получить за один ход как из 8 (деля на число 4), так и из 4 (деля на 2). Значит, если П первым ходом оставит 16, то он гарантирует себе победу.

# 4т\*. Хитрые сливы

В корзине лежат 12 слив. Двое по очереди достают из нее сливы. За один раз можно достать 1, 2 или 3 сливы. Выигрывает тот игрок, кто достанет последнюю сливу. У кого есть выигрышная стратегия?

#### Решение

П первым ходом может взять 1, 2 или 3 сливы, оставив 11, 10 или 9 слив. Тогда В берет 3, 2 или 1 сливу так, чтобы оставить сопернику 8 слив. В силу решения задачи №4\* в такой ситуации П проигрывает.

ІІступень. Занятие 19. Строй стратегию!

## Запись на доске и в рабочей тетради

Стратегия В: уменьшать число слив до числа, кратного 4.

Обоснование стратегии:

$$\Pi$$
: 12 – (1, 2, 3) = (11, 10, 9)

B: 
$$(11, 10, 9) - (3, 2, 1) = 8$$

$$\Pi$$
: 8 – (1, 2, 3) = (7, 6, 5)

B: 
$$(7, 6, 5) - (3, 2, 1) = 4$$

$$\Pi$$
: 4 – (1, 2, 3) = (3, 2, 1)

$$B: (3, 2, 1) - (3, 2, 1) = 0$$
 (выигрыш)

Ответ: у второго игрока.

### Путь к решению

Выигрыш В будет обеспечен, если перед последним его ходом останется 4 сливы. Чтобы получилась такая ситуация, В достаточно оставить после предыдущего хода 4 + 4 = 8 слив.

### Дополнительные задания

# 5. Игра-шутка

Есть две кучки конфет: в одной 10 конфет, а в другой — 20. Два игрока ходят по очереди. За один ход можно разделить любую кучку на две меньшие (ломать конфеты нельзя) Проигрывает тот из игроков, кто не может сделать ход. У кого есть выигрышная стратегия?

#### Подсказка

Какая позиция будет в игре, когда у игроков не будет хода? Сколько всего кучек конфет получится?

### Решение

Игрок не может сделать ход, когда все конфеты уже поделены на кучки по 1. За каждый ход количество кучек увеличивается на 1. Изначально было 2 кучки, в конце будет 30 кучек (по 1 конфете). Значит, всего будет сделано 30 - 2 = 28 ходов. Тогда последний ход сделает второй игрок — Вася (он делает четные ходы).

#### Примечание

Как можно заметить, результат игры не зависит от того, как именно ходят игроки.

Ответ: у второго игрока.