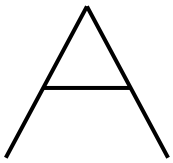
ЗАНЯТИЕ 18. ОДНИМ РОСЧЕРКОМ

Учебное содержание

Предметные цели

1. Сформировать представления о графе, вершине и ребре графа, степени вершины.
2. Развивать умение применять метод перебора в геометрических задачах.
3. Познакомить со способом проверки[1] невозможности изображения фигуры одним росчерком.

Задача-ключ

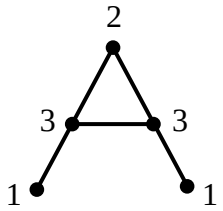


Можно ли нарисовать данную фигуру одним росчерком (то есть не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды)?

Решение

1-*й способ (граф)*

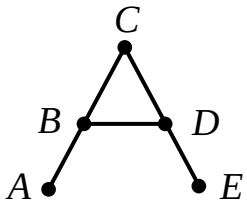
Поставим точки в местах пересечения линий. Подпишем у каждой точки количество линий, выходящих из нее.



Если некоторая точка не является началом или концом пути, то из нее может выходить только четное число линий (все линии разбиваются на пары, по одной из которых «входим» в точку, а по другой — «выходим»). Из точек, являющихся началом и концом пути, может выходить нечетное число линий, но таких точек может быть не более 2. Однако в фигуре на рисунке из четырех точек выходит нечетное число линий. Значит, нарисовать данную фигуру одним росчерком нельзя.

2-*й способ (метод перебора)*

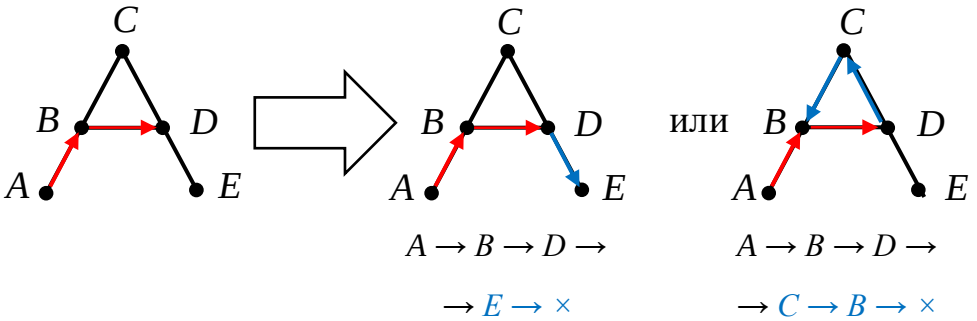
Поставим точки в местах пересечения линий. Для удобства обозначим точки буквами *A*, *B*, *C*, *D*, *E* (см. рисунок).

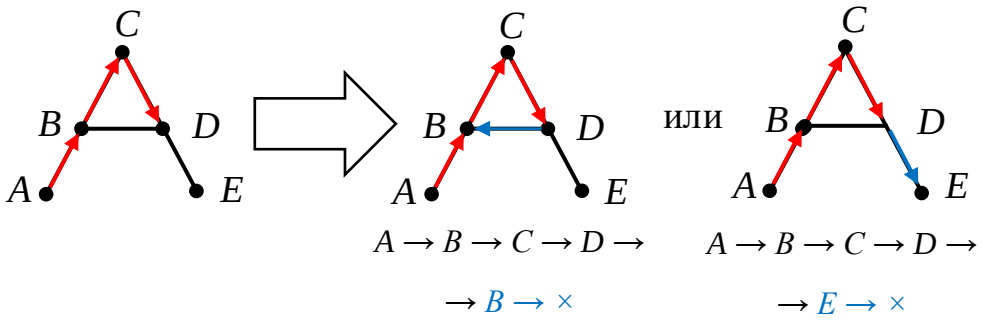


Точки *A* и *E* обязательно должны быть началом и концом росчерка, так как одну линию нельзя проводить дважды. При этом неважно, с какой точки начать: любой путь можно изобразить от конца к началу. Поэтому изобразим все возможные варианты пути, начинающиеся с точки *A*.

[1] Этот способ связан с критерием существования эйлерова пути в графе. О таких путях будет идти речь в курсе позднее.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute





Ни в одном из случаев не получается провести все отрезки.

Так как разобраны все случаи, то можно сделать вывод о том, что фигуру нельзя нарисовать одним росчерком.

Ответ: нет.

Советы о рисовании фигур одним росчерком

1. Поставь точки в местах пересечения линий и на их концах. (Назовем эти точки **вершинами**. Вершина **четная**, если из нее выходит четное число линий, и **нечетная** — если число линий нечетное.)
2. Найди число получившихся **нечетных** вершин.
   - Если их **нет**, то попробуй начать росчерк с любой удобной вершины.
   - Если нечетных вершин **ровно 2**, то попробуй начать с одной из них — только они могут быть началом и концом росчерка.
   - Если нечетных вершин **больше 2**, то нарисовать фигуру одним росчерком нельзя.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. Где есть пересечения линий на рисунке?
2. Сколько получилось точек? Сколько линий выходит из каждой точки?
3. Сколько точек, из которых выходит нечетное число линий? Какие это точки?
4. В каких точках могут быть начало и конец пути?

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

5. Начни вести путь с точки, являющейся его предполагаемым началом или концом. Какие есть варианты продолжения пути?

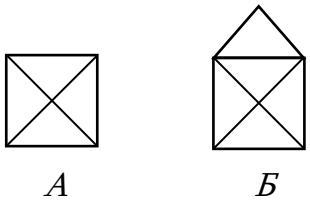
Как проверить

Проверь свой способ изображения фигуры одним росчерком, нарисовав еще одну копию такой фигуры. При этом каждая линия должна оказаться проведенной только один раз, и путь не должен прерываться.

Основные задания

1. Домики (3 мин)

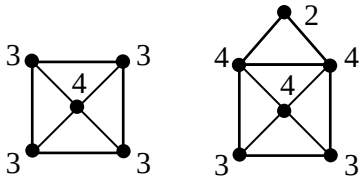
Рассмотри фигуры *А* и *Б*. Какую из них можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя одну линию дважды? Покажи возможный путь или объясни, почему его нельзя построить.



Подсказка

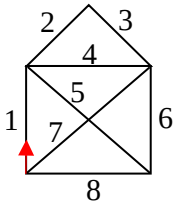
Сначала посчитай, сколько линий выходит из каждой вершины, и определи, где может быть начало и конец пути.

Решение



В фигуре *А* больше 2 точек, из которых выходит нечетное число линий ⇒ Фигуру нельзя нарисовать одним росчерком.

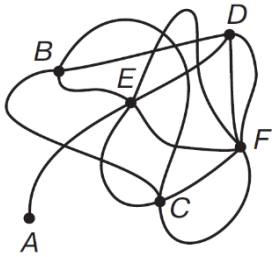
Фигуру *Б* одним росчерком нарисовать можно, если начать с одного из нижних углов:



Ответ: только фигуру *Б*.

2. Клубок (4 мин)

Котенок размотал клубок ниток так, что один конец нити теперь лежит в точке *А*, а другой — в одной из оставшихся отмеченных точек. В какой именно? Есть ли другие варианты?



Подсказка

Сколько линий выходит из каждой отмеченной точки?

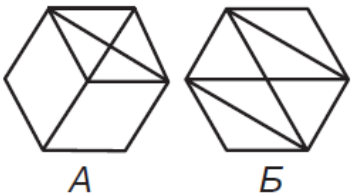
Решение

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Другой конец нити мог оказаться только в точке *C*, так как только из этой точки (кроме начальной точки *A*) выходит нечетное число (5) линий.

Ответ: в точке *C*; нет.

3. И начало, и конец (4 мин)

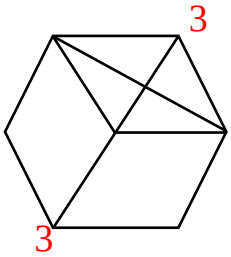


Какие из фигур *А* и *Б* на рисунке можно нарисовать одним росчерком так, чтобы его начало и конец совпадали?

Подсказка

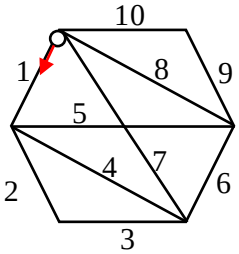
Сколько линий может выходить из вершины, являющейся и началом, и концом пути?

Решение



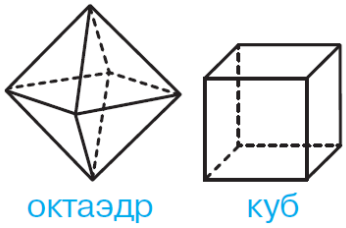
Заметим, что в фигуре *А* из двух точек выходит по нечетному числу линий (3). Значит, путь должен начинаться в одной из этих точек, а заканчиваться в другой. Поэтому данную фигуру нельзя нарисовать так, чтобы начальная и конечная точки совпадали.

Фигуру *Б* указанным образом нарисовать можно, например, так, как показано на рисунке.



Ответ: только фигуру *Б*.

4*. По ребрам (5 мин)



В вершине объемной фигуры сидит муравей.

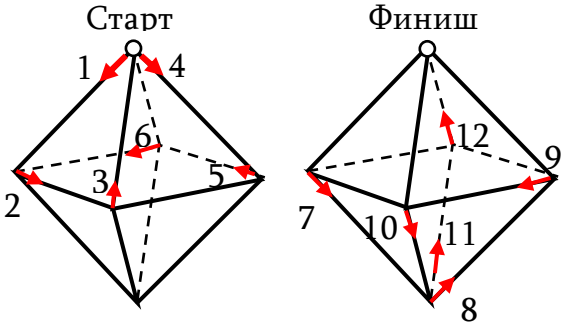
а) Нарисуй, как он может проползти по всем ребрам октаэдра ровно по одному разу.

б) Объясни, почему у муравья не получится проползти ровно по одному разу по всем ребрам куба.

Подсказка

Обрати внимание на сходство пути муравья и рисования фигуры одним росчерком.

Решение



а) Один из возможных вариантов обхода — на рисунке.

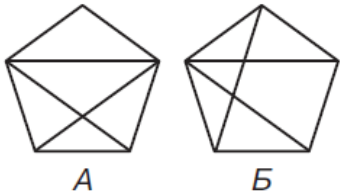
б) Рассмотрим точки в вершинах куба (всего их 8). Ребра куба — это линии, соединяющие данные точки. Из каждой из этих 8 точек выходит по нечетному числу (3) линий. Таких точек больше 2, и поэтому путь по всем ребрам куба по одному разу построить нельзя.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Ответ: а) См. рисунок; б) у такой фигуры больше 2 вершин, из которых выходит нечетное число линий.

Тренировочные задания

1т. Домики

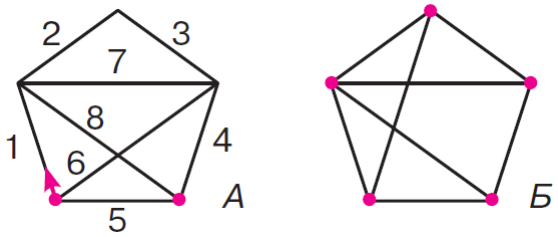


Какую фигуру, *А* или *Б*, можно нарисовать одним росчерком? Ответ объясни.

Решение

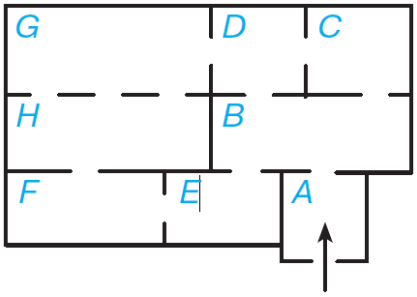
В фигуре *А* две нечетные вершины. Ее можно нарисовать одним росчерком, начав в одной из них и закончив в другой (см. рисунок).

В фигуре *Б* — 4 нечетные вершины, 4 > 2 ⇒ Фигуру *Б* нельзя нарисовать одним росчерком.



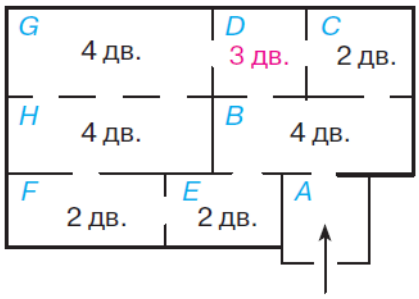
Ответ: только фигуру *А*.

2т. План музея



Перед тобой план музея. Турист обошел все залы и понял, что через каждую дверь он прошел ровно один раз. В каком зале он мог оказаться в конце пути, если зашел с улицы в зал *А*? Есть ли другие варианты?

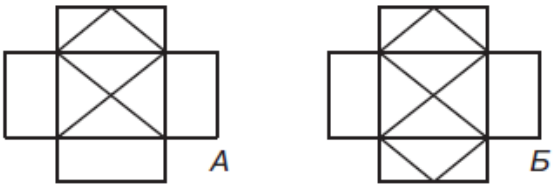
Решение



При обходе залов турист входит в одну дверь и выходит в другую (парами). Нечетное число дверей (кроме зала *А*) ведет только из зала *D* ⇒ Турист мог закончить маршрут только в зале *D*.

Ответ: в зале *D*; нет.

3т. И начало, и конец



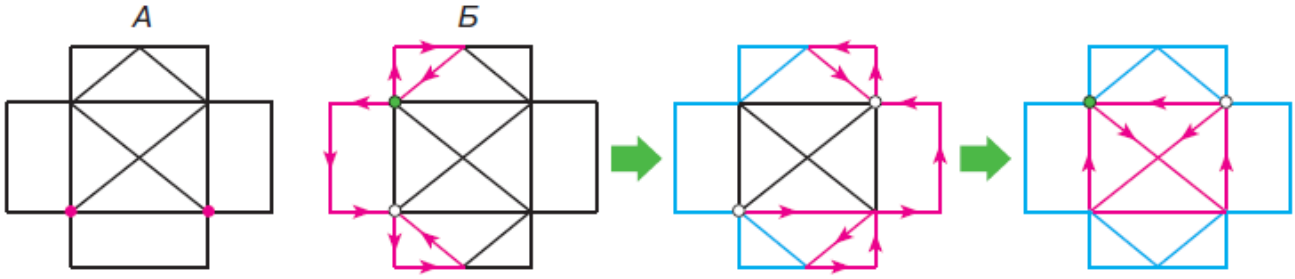
Какую фигуру, *А* или *Б*, можно нарисовать одним росчерком так, чтобы его начало и конец совпадали?

Решение

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

В фигуре *А* две нечетные вершины ⇒ Они должны быть началом и концом росчерка ⇒ Начало и конец росчерка не могут совпасть (см. рисунок).

Фигуру *Б* нарисовать можно (см. рисунок).



Ответ: только фигуру *Б*.

4т*. Богатырская задача

У Ильи Муромца есть стальной прут длиной 240 см. Он хочет похвастаться силушкой, согнув прут в нескольких местах так, чтобы получился каркас куба с ребром 20 см. Объясни, почему богатырь не сможет это сделать, хотя силы у него достаточно. Ломать прут нельзя.

Решение

Из всех вершин куба выходит по 3 линии ⇒ Все 8 вершин куба — нечетные, 8 > 2 ⇒ Нарисовать куб одним росчерком не получится ⇒ Согнуть такой каркас нельзя.

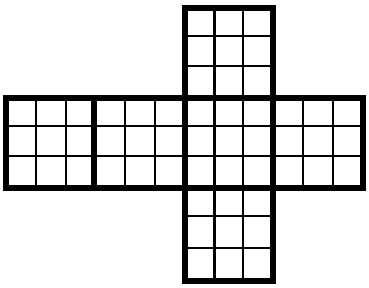
Дополнительные задания

5. Путь по кубику

Все грани куба с ребром 3 см разделены на квадратики 1 × 1 см. Нарисуй на поверхности этого куба замкнутый путь, проходящий через все маленькие квадратики (кроме самого первого) по одному разу и не пересекающий вершины квадратов.

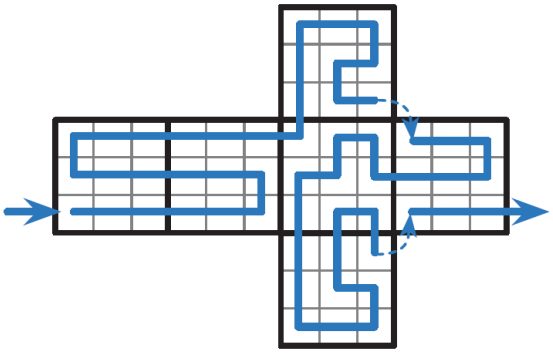
Подсказка

Удобно рисовать такой путь на развертке кубика (см. рисунок):



Решение

Возможный пример — на рисунке.



Замечание

Существуют и другие примеры.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute