ЗАНЯТИЕ 17. ОСТАТКИ НА ЧИСЛОВОМ ЛУЧЕ

Учебное содержание

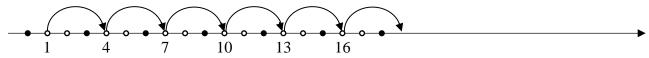
Предметные цели

- 1. Познакомить с периодичностью чисел, делящихся на n, в ряду натуральных чисел.
- 2. Сформировать представления о периодичности чисел, дающих одинаковые остатки при делении на *n*, в ряду натуральных чисел.

Задача-ключ

Кузнечик находится на числовом луче в точке с координатой 1. Он может прыгать по числовому лучу на 3 единицы вправо. Сможет ли кузнечик когданибудь оказаться в точке с координатой, кратной трем?

Решение



$$K = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, ...\}$$

Соседние на числовом луче числа, делящиеся на 3, отличаются на 3. Кузнечик изначально находится в точке с координатой 1, и прыгает на 3 единицы. Значит, он может оказываться только в точках с координатой, на 1 большей делящейся на $3 \Rightarrow$ Кузнечик не сможет оказаться в точке с координатой, делящейся на 3.

Ответ: нет.

Свойства делимости и остатков

- 1. В ряду натуральных чисел соседние числа, кратные числу n, отличаются на одно и то же число n.
- 2. Если числа имеют одинаковые остатки при делении на n, то их разность делится на n.
- 3. Наоборот, если разность двух чисел не делится на n, то эти числа имеют разные остатки при делении на n.

Вопросы для построения подводящего диалога

- 1. О каких числах идет речь в задаче? Опишите свойства этих чисел.
- 2. Есть ли в условии числа с известным остатком при делении на некоторое число?

Как проверить

Способы проверки указаны в разборе задач.

Основные задания

1. Прыжки (3 мин)

На числовом луче в точке с координатой 2 сидят два кузнечика: Тройка и Пятерка. Тройка может прыгать за один раз на 3 единицы вправо или влево, а Пятерка — вправо или влево на 5 единиц. Какой кузнечик может допрыгать в точку с координатой 37? Какое наименьшее количество прыжков ему понадобится сделать?

Подсказка

Какое расстояние нужно преодолеть обоим кузнечикам до «финиша»? Получится ли это сделать прыжками данной длины?

Решение

При прибавлении и вычитании n остаток от деления на n сохраняется. 37 имеет остаток 1 при делении на 3 и остаток 2 при делении на 5. Вначале кузнечики находятся в точке с координатой 2, то есть остаток всегда равен 2. Значит, Пятерка сможет допрыгать до точки 37, а Тройка — не сможет ни за какое количество прыжков.

Так как при прыжках вправо расстояние до «финиша» уменьшается, а при прыжках влево — увеличивается, минимальное количество прыжков будет в том случае, когда Пятерка всегда будет прыгать вправо. Тогда Пятерке понадобится (37 - 2) : 5 = 7 прыжков.

Запись на доске и в рабочей тетради

- 1) 37 2 = 35 (ед.) расстояние до «финиша»
- 2) 35 : 5 = 7 (пр.) понадобится Пятерке
- 3) 35 не делится на 3 ⇒ Тройка не может допрыгать до «финиша».

Ответ: Пятерка; 7 прыжков.

Как проверить

Для проверки ответа можно изобразить возможные положения кузнечиков на числовом луче или выписать их допустимые координаты, меньшие 40.

2. Неточный расчет (5 мин)

В столовой продаются булочки по 28 рублей за штуку и конфетки по 7 рублей за штуку. У Дениса в кошельке было целое число рублей. Он купил столько булочек, на сколько ему хватило денег. Денис утверждает, что может купить на оставшиеся деньги еще 4 конфетки. Докажи, что Денис ошибается.

Подсказка

Какое наибольшее количество денег могло остаться у Дениса после того, как он купил булочки?

Решение

Раз Костя не мог купить на оставшиеся деньги ни одной булочки, у него осталось меньше 28 рублей. При этом 4 конфетки стоят ровно $7 \cdot 4 = 28$ рублей. Значит, Костя ошибается.

Запись на доске и в рабочей тетради

- 1) Остаток от деления числа на 28 меньше $28 \Rightarrow У$ Кости осталось меньше 28 рублей.
- 2) $7 \cdot 4 = 28$ (р.) стоят 4 конфетки. Но у Кости меньше 28 р \Rightarrow Он ошибается.

3. Коробки (5 мин)

Когда Даша разложила всех своих кукол поровну по 6 маленьким коробкам, у нее осталась 1 лишняя кукла, а когда разложила поровну по трем большим коробкам — осталось 2 лишние куклы. Докажи, что Даша ошиблась, раскладывая кукол.

Подсказка 1

Изобрази числовой луч и отметь на нем несколько чисел, подходящих под каждое условие. Что ты замечаешь?

Подсказка 2

Если разбить маленькие коробки на пары, то окажется, что всех кукол без одной можно разложить поровну на 3 группы.

Решение

1-й способ (числовой луч)

Так как при распределении кукол поровну по 6 коробкам осталась 1 кукла, общее число кукол у Тани дает остаток 1 при делении на 6. Это значит, что на числовом луче это число находится на 1 единицу правее числа, делящегося на 6. Но так как $6 = 3 \cdot 2$, то любое число, делящееся на 6, делится и на 3. Значит, количество кукол дает остаток 1 при делении на 3, а из второго условия следует, что оно дает остаток 2 при делении на 3. Противоречие. Значит, Таня ошиблась.

2-й способ (разбиение на пары)

- 1) Разобьем 6 маленьких коробок на 3 пары. Тогда в парах получится поровну кукол. Значит, число всех кукол без одной делится на 3, то есть общее число кукол дает остаток 1 при делении на 3.
- 2) Из условия про большие коробки следует, что число кукол дает остаток 2 при делении на 3.
- 3) Пункты 1 и 2 противоречат друг другу. Значит, Таня ошиблась.

Запись на доске и в рабочей тетради

1-й способ

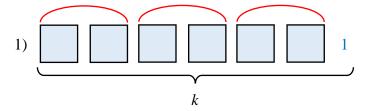


- числа, кратные 6
- числа, кратные 3, но не кратные 6

Возможные варианты числа кукол у Тани при раскладывании на 6 коробок и на 3 коробки не совпадают ⇒ Таня ошиблась.

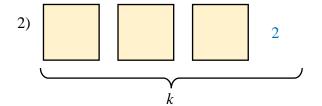
2-й способ

Пусть k — количество кукол у Тани.



k дает ост. 1 при делении на $6 \Rightarrow$

k дает ост. 1 <u>при делении на 3</u>.



k дает ост. 2 при делении на 3

3) При делении одного числа k на 3 не может получиться два остатка разных остатка (1 и 2) \Rightarrow Таня ошиблась.

4*. Квадратная расстановка (7 мин)

На доске написаны 16 чисел: 5, 15, 25, 35 и так далее через 10. Расставь эти числа в клетки таблицы 4×4 так, чтобы разность любых двух чисел, стоящих в соседних по стороне клетках, не делилась на 4.

Подсказка

Какие остатки при делении на 4 дают написанные на доске числа?

Решение

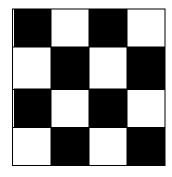
Возможный пример — на рисунке.

5	15	25	35
55	45	75	65
85	95	105	115
135	125	155	145

Путь к решению

Заметим, что записанные в данном ряду через одно числа отличаются на 20, а 20 делится на 4. Значит, стоящие через одно числа имеют одинаковые остатки при делении на 4. Первое число дает остаток 1 при делении на 4, а второе — остаток 3 при делении на 4, то есть нечетные по номеру числа в ряду дают остаток 1 при делении на 4, а четные по номеру — остаток 3.

Разность чисел с разными остатками при делении на 4 не может делиться на 4, поэтому если расставить числа с разными остатками в «шахматном порядке», то есть чтобы числа в соседних по стороне клетках имели разные остатки при делении на 4, условие задачи будет выполняться.



На черных клетках — числа с остатком 1 при делении на 4. На белых — с остатком 3.

Как проверить

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Чтобы проверить правильность построенного примера, можно закрасить клетки, в которых стоят числа, дающие остаток 1 при делении на 4, а клетки, в которых стоят числа, дающие остаток 3 — оставить белыми. Если после этого получилась шахматная раскраска, то пример верный. (На 4 будет делиться только разность чисел с одинаковым остатком при делении на 4, а значит это произойдет только в случае, если две клетки одного цвета окажутся соседними по стороне, чего в шахматной раскраске не бывает.)

Тренировочные задания

1т. Прыжки

На числовом луче в точке с координатой 20 сидят два кузнечика: Четверка и Семерка. Четверка может прыгать за один раз на 4 единицы вправо или влево, а Семерка — вправо или влево на 7 единиц. Какой кузнечик может допрыгать в точку с координатой 88?

Решение

- 1) 88 20 = 68 (ед.) расстояние до «финиша»
- 2) 68: 4 = 17 (пр.) понадобится Четверке
- 3) 68 не делится на 7 ⇒ Семерка не допрыгает до «финиша».

Ответ: Четверка.

2т. Точный расчет

У Володи было целое число рублей. Он пришел в магазин и купил столько бутылок кефира по 50 р., сколько смог на имеющиеся у него деньги. Он утверждает, что смог купить еще 2 батона хлеба по 25 р. Не ошибается ли Володя?

Решение

Раз Вова не мог купить на оставшиеся деньги ни одной бутылки кефира, значит, у него осталось меньше 50 рублей. При этом 2 батона стоят $25 \cdot 2 = 50$ рублей. Значит, Вова ошибается.

Запись на доске и в рабочей тетради

- 1) Остаток от деления числа на 50 меньше 50 ⇒ У Володи осталось меньше 50 рублей.
- 2) $25 \cdot 2 = 50$ (р.) стоят 2 батона. Но у Володи меньше 50 р. \Rightarrow Он ошибается.

Ответ: оппибается.

3т. Коллекция

Вероника коллекционирует редкие монеты. Она утверждает, что если разложит все монеты в столбики по 8, то останутся 3 лишние монеты, а если разложит в столбики по 4, то останется одна лишняя монета. Не ошибается ли Вероника?

Решение

1-й способ

Так как при раскладывании монет по 8 штук остается 3 монеты, то общее число монет дает остаток 3 при делении на 8. Это значит, что на числовом луче это число находится на 3 единицы правее числа, делящегося на 8. Но так как $8 = 4 \cdot 2$, любое число, делящееся на 8, делится и на 4. Значит, количество монет дает остаток 3 и при делении на 4, а из второго условия следует, что оно дает остаток 1 при делении на 4. Противоречие. Значит, Вероника ошибается.

2-й способ

Каждый столбик из 8 монет можно разделить на два столбика по 4 монеты. Значит, при раскладывании монет на кучки по 4 штуки должно получиться, с одной стороны, 3 лишних монеты, а с другой — 1 лишняя монета. Это невозможно, значит, Вероника ошибается.

Запись на доске и в рабочей тетради

1-й способ

Возможные варианты числа монет Вероники при раскладывании по 8 и по 4 не совпадают ⇒ Вероника ошибается.



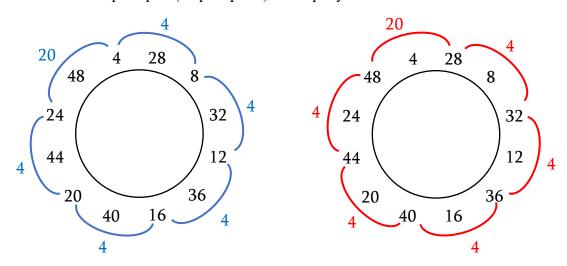
Ответ: ошибается.

4т*. Круглая расстановка

На доске написаны 12 чисел: 4, 8, 12 и так далее через 4. Расставь эти числа по кругу так, чтобы разность любых двух чисел, стоящих через одно, не делилась на 8.

Решение

Один из возможных примеров (с проверкой) — на рисунке.



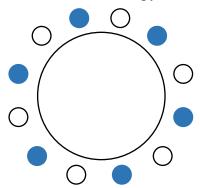
Путь к решению

Заметим, что в ряду чисел 4, 8, 12, ... числа, стоящие через одно, отличаются на 8. Так как второе из этих чисел делится на 8, значит, и все числа, стоящие на четных местах в этом ряду, делятся на 8.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Первое число в ряду не делится на 8, значит, и все числа, стоящие на нечетных местах в ряду, не делятся на 8.

Разность двух чисел, одно из которых делится на 8, а второе не делится на 8, не может делиться на 8. Отсюда возникает идея примера: можно в круге через одно чередовать числа, делящиеся на 8 и не делящиеся на 8. При этом можно отдельно расставлять числа в белых и синих кружках на рисунке, так как числа разбиваются на две такие группы через одно по 6 в группе.



Дополнительные задания

5. Страна Конфетия

В стране Конфе́тии в обращении только купюры в 50, 18, 15, 10 и 8 цукатов. Мама дала юному жителю страны одну купюру в 50 цукатов. В течение 8 дней он ежедневно покупал в магазине булку по одной цене, получая полную сдачу купюрами. Какой могла быть цена булки и как мальчик мог расплачиваться каждый день? Приведи пример.

Подсказка

Купюрами в 10 и 15 цукатов можно оплатить со сдачей любую сумму, кратную ____.

Решение

Например, булка могла стоить 5 цукатов. Покажем, как мальчик мог расплачиваться.

I день: 50 - 5 = 45. Сдача: 15 + 15 + 15.

II день: 45 - 5 = 40. Сдача: 15 + 15 + 10.

III день: 40 - 5 = 35. Сдача: 15 + 10 + 10.

IV день: 35 - 5 = 30. Сдача: 10 + 10 + 10.

V день: 30 - 5 = 25. Сдача: 15 + 10.

VI день: 25 - 5 = 20. Сдача: 10 + 10.

VII день: 20 - 5 = 15. Сдача: 15.

VIII день: 15 - 5 = 10. Сдача: 10.

Ответ: например, булка могла стоить 5 цукатов (тогда мальчик каждый день может получать нужную сдачу купюрами).

Путь к решению

Попробуем узнать, насколько много могла стоить булка. Если бы булка стоила хотя бы 7 цукатов, то мальчику пришлось бы потратить не меньше $8 \cdot 7 = 56$ цукатов, что больше 50. Значит цена булки не больше 6 цукатов.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.peterson.institute

Заметим, что в задаче требуется только лишь привести один из возможных примеров, поэтому объясним, как можно было догадаться попробовать поискать пример с ценой булки равно 5 цукатам.

Так как в стране есть купюры в 15 и 10 цукатов, то всегда можно выдать сдачу, кратную 5 цукатам (кроме, собственно, 5 цукатов). Так как вся сумма, имеющаяся у юного жителя, тоже кратна 5 цукатам, удобно попробовать построить пример, в котором цена булки тоже кратна 5 цукатам. Но если она кратна 5 цукатам, но меньше 6 цукатов, то это ровно 5 цукатов.