ЗАНЯТИЕ 2. ОСТРОВ РЫЦАРЕЙ И ЛЖЕЦОВ

Учебное содержание

Предметные цели

1. Расширить представления об истинных и ложных высказываниях, отрицании простых высказываний, высказываниях о логическом следовании.
2. Познакомить с методом перебора вариантов в логических задачах.

Задача-ключ

Вы оказались на далеком острове, где живут только рыцари, которые по кодексу чести говорят всегда только правду, и лжецы, которые все время лгут. Однажды на остров приехал турист, встретил там местного жителя и захотел узнать, кто перед ним: рыцарь или лжец. Турист задал вопрос: «Ты рыцарь?» Правильно ли турист выбрал вопрос? Поймет ли он, кто перед ним?

Решение

Докажем, что турист не сможет понять, кто перед ним.

Точно узнать по одному ответу, рыцарь перед тобой или лжец, можно только если на этот вопрос рыцарь даст один ответ, а лжец — другой.

1) Если перед туристом рыцарь (Р), то он честно ответит «да» на вопрос туриста.

2) Если перед туристом лжец (Л), то он солжет, что он рыцарь, и тоже ответит «да».

Таким образом, турист в любом случае получит ответ «да» и не сможет понять, кто перед ним. Вопрос выбран неправильно.

Ответ: нет.

Советы по решению логических задач

1. Если в задаче есть неизвестный местный житель, то можно воспользоваться методом перебора: сначала предположить, что он рыцарь, а потом — что лжец. Если в варианте нет противоречия с условием задачи, то он подходит.
2. Иногда в задачах про рыцарей и лжецов бывает несколько подходящих вариантов ответа. Обычно при решении такой задачи нужно найти все варианты.
3. Точно определить персонажа можно, если есть только один подходящий вариант.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. О ком говорится в задаче? Какие это могут быть персонажи?
2. Какие случаи можно разобрать?
3. Что нужно сделать для того, чтобы обосновать ответ?

Как проверить

1. Нужно проверить, что рассмотрены все возможные случаи. Это позволит доказать, что найденный ответ — единственный возможный, или найти все варианты, если их несколько.
2. Нужно проверить, что в найденных возможных случаях выполняются все условия, то есть все рыцари говорят правду, а все лжецы – лгут.

Основные задания

1. Встреча (5 мин)

а) Лжец встретил жителя острова и сказал ему: «Ты лжец!» Кем был этот житель?

б) Встретились два жителя острова и сказали друг другу: «Ты лжец!» Сколько среди них было рыцарей?

Подсказка

Подумай, кому мог сказать эту фразу лжец, а кому — рыцарь.

Решение

а) Лжец солгал про жителя острова, значит этот житель — не лжец, а рыцарь.

б) Согласно пункту а) лжец мог сказать эту фразу только рыцарю. Если рыцарь говорит кому-то эту фразу, то это правда и второй действительно лжец. Значит, среди этих двух жителей обязательно один рыцарь и один лжец.

Запись на доске и в рабочей тетради

а) Лжец лжет, что житель — Л $\Rightarrow$ Житель на самом деле Р.

б) Л может сказать такую фразу только Р, а Р — только Л. Значит, встретились один Л и один Р.

Ответ: а) рыцарем; б) 1 рыцарь.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. Рассмотрим любого жителя из этих двоих. Кем он может быть? Какие варианты нужно рассмотреть?

2. На скамейке (6 мин)

На скамейке сидят два жителя: мальчик и девочка. «Я мальчик», — сказал ребенок в зеленой футболке. «А я девочка», — сказал ребенок в синей футболке. Известно, что среди детей есть хотя бы один лжец. Кто в зеленой футболке — мальчик или девочка?

Подсказка 1

Рассмотри два случая: когда в зеленой футболке мальчик и когда в зеленой футболке девочка.

Подсказка 2

Рассмотри два случая: когда первый ребенок Р и когда он Л.

Решение

1-*й способ*

1) Если в зеленой футболке мальчик, то он Р, тогда 2-й ребенок — девочка и она Р. В этом случае среди детей нет Л. Противоречие условию «хотя бы один Л».

2) Если в зеленой футболке девочка, то она Л. Тогда 2-й ребенок — мальчик и он тоже Л. Вариант подходит.

2-*й способ*

1) Если в зеленой футболке Р, то он мальчик, а 2-й ребенок — девочка и она тоже Р. Тогда среди детей нет Л. Противоречие с условием задачи.

2) Если в зеленой футболке Л, то это девочка. 2-й — мальчик и он тоже Л. Вариант подходит.

Запись на доске и в рабочей тетради

1-*й способ*

1) Если в зеленой футболке мальчик $\Rightarrow$ он Р. Тогда II — девочка и она Р. $\Rightarrow$ Среди них нет Л. Противоречие.

2) Если в зеленой футболке девочка $\Rightarrow$ она Л. Тогда II — мальчик и он Л.

2-й способ

1) Если в зеленой футболке Р $\Rightarrow$ это мальчик. Тогда II — девочка и она Р. $\Rightarrow$ Среди них нет Л. Противоречие.

2) Если в зеленой футболке Л $\Rightarrow$ это девочка. Тогда II — мальчик и он Л.

Ответ: девочка.

3. В пути (6 мин)

Однажды два жителя острова сели в такси. Таксист решил спросить у них, кто они: рыцари или лжецы. Первый сказал: «Среди нас двоих есть рыцарь». Второй ответил ему: «Ты лжец!» Можно ли по этим фразам точно определить, кто первый и кто второй?

Подсказка

Рассмотри два случая: когда первый житель Л и когда он Р.

Решение

1) Если I — Л, то он лжет, и среди них нет рыцарей. Тогда II — Л. Но II говорит правду про то, что I — Л. Противоречие (Л говорит правду).

2) Если I — Р, то он говорит правду, а второй — лжет. Значит, II — Л. Вариант подходит.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) Если I — Л, то среди них нет рыцарей. $\Rightarrow$ II — Л. Но II говорит правду про I. Противоречие. Вариант не подходит.

2) Если I — Р, то II лжет. $\Rightarrow$ II — Л. Вариант подходит.

Ответ: да, I — Р, а II — Л.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. В каком случае по фразам можно точно определить, кем являются первый и второй?
2. По фразам нельзя точно определить, кем кто является, если…
3. Кем может быть первый житель? А кто тогда второй?

Замечание

Важно указывать в скобках, в чем именно заключается противоречие в неподходящем варианте.

4*. Кто ушел? (7 мин)

На заседание Совета острова пришло несколько (больше одного) жителей. Один сказал: «Тут всего 7 человек!» — и ушел. После этого каждую минуту кто-то уходил, сказав на прощание: «Все, кто ушел до меня, перед уходом солгали», — пока комната не опустела. Какими по счету могли уходить рыцари? Укажи все возможности.

Подсказка

Рассмотри варианты, каким персонажем мог быть первый ушедший.

Решение

1) Если первый ушедший был Р, то на заседании было действительно 7 человек. Он не лгал, и поэтому все ушедшие после него — солгали, так как не все, ушедшие ранее, солгали. Значит, остальные жители — Л.

2) Если первый ушедший был Л, то на заседании было не 7 человек. Тогда второй сказал правду и был Р, а все последующие солгали и были Л.

Запись на доске и в рабочей тетради

Рассмотрим первого ушедшего человека. Если он Р, то всего было 7 человек, а все ушедшие после него – Л. Если он Л, то всего было не 7 человек, а второй ушедший – Р. Тогда все следующие за вторым – Л.

Ответ: 1-м или 2-м.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. Если в какой-то момент ушел Р, то кем были те, кто ушел после него?
2. Могло ли среди уходивших быть два рыцаря? А больше?

Тренировочные задания

1т. Встреча

Два жителя острова, Тим и Сэм, встретились однажды и сказали друг другу: «Ты рыцарь!» Достаточно ли этой информации, чтобы точно узнать, сколько среди них рыцарей?

Решение

1) Пусть Тим — Р. Он говорит правду, что Сэм — Р. Тогда и Сэм говорит правду про Тима. Всего 2 рыцаря.

2) Пусть Тим — Л. Он лжет, что Сэм — Р $\Rightarrow$ Сэм на самом деле Л. Тогда и Сэм лжет про Тима, что тот Р. Всего 0 рыцарей.

3) Значит, Р может быть 2 или 0 $\Rightarrow$ Точно узнать количество Р нельзя.

Ответ: нет.

2т. Сундуки

Перед вами два сундука: в одном лежат золотые слитки, а в другом — железные. На первом сундуке написано: «Тут золото». На втором сундуке написано: «Золото в другом сундуке». Можно ли определить точно, в каком сундуке золото, если хотя бы одна надпись верна? Если да, то в каком сундуке золото?

Решение

1) Если золото в I сундуке, то обе надписи верны и такое может быть.

2) Если золото во II сундуке, то обе надписи неверны. Противоречие с тем, что хотя бы одна надпись верна. Случай не подходит.

Ответ: да, золото в первом сундуке.

3т. Непонятная фраза

Когда у двух жителей спросили, кто они, первый ответил: «Хотя бы один из нас — лжец». Второй житель сказал что-то неразборчиво. Можно ли узнать, кто из них кто, зная только ответ первого жителя?

Решение

I не может быть Л, так как тогда его фраза будет правдой. $\Rightarrow$ I — Р и говорит правду. Тогда II — Л.

Ответ: да, I — Р, II — Л.

4т*. Очередь

В очереди за билетами в театр стоят десять жителей. Каждый из них сказал подошедшему журналисту: «Следующий за мной в очереди стоит лжец!» Сколько всего лжецов в очереди на самом деле?

Решение

1-*й способ*

Рассмотрим последнего (10-го) жителя в очереди. За ним никто не стоит, значит, он лжет, то есть он Л. Тогда 9-ый сказал правду, он — Р. Но тогда 8-ой лжет, он — Л. Значит, рыцари и лжецы в очереди чередуются. Всего 5 лжецов.

← Л	← Р	← Л	← Р	← Л	← Р	← Л	← Р	← Л	← Р
10-й	9-й	8-й	7-й	6-й	5-й	4-й	3-й	2-й	1-й

2-*й способ*

Если 1-ый житель в очереди — Р, то за ним стоит Л, который солжет. Значит, 3-ий — Р. Рыцари и лжецы в очереди чередуются: ЛРЛРЛРЛРЛР.

Если 1-ый — Л, то за ним стоит Р, который скажет правду. Значит, 3 — Л. Рыцари и лжецы в очереди чередуются: РЛРЛРЛРЛРЛ. Но тогда последний — Р, а он соврал, потому что за ним вообще никто не стоит. Противоречие.

3-*й способ*

Если фразу говорит Р, то за ним стоит Л, а если ее произносит Л — то Р. Значит, лжецы и рыцари чередуются. Тогда всех жителей можно разбить на пары, в каждой из которых ровно один Л:

12 3 4 5 6 7 8 9 10

Значит, всего 5 пар и 5 лжецов.

Ответ: 5 лжецов.

Замечание

Обратите внимание, что в решении 3-м способом не проверяется, существует ли хотя бы одна очередь, подходящая под все условия задачи (только утверждается, что в любой подходящей расстановке может быть только 5 рыцарей и 5 лжецов). Тем не менее, такое решение считается полным в случае, если формулировка задачи подразумевает наличие такой расстановки («в очереди за билетами в театр **стоят** 10 жителей»).

С другой стороны, встречаются и задачи, отличающиеся формулировкой, верным ответом к которым будет «такого не может быть».

Дополнительные задания

5. Парламент

Однажды на заседании парламента каждый сказал остальным: «Да вы все лжецы!» Сколько рыцарей могло быть в парламенте? Укажи все возможности.

Подсказка

Рассмотри два варианта: когда рыцарей нет и когда есть хотя бы один рыцарь.

Решение

1) Если Р нет, то все Л. Но тогда каждый Л сказал правду. Противоречие.

2) Если есть хотя бы один Р, то он сказал правду и все остальные — Л.

Ответ: 1 рыцарь.