ЗАНЯТИЕ 15. ШАХМАТНАЯ ДОСКА

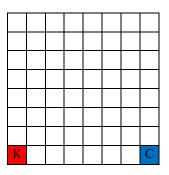
Учебное содержание

Предметные цели

- 1. Развить умение применять общие принципы при построении геометрических конструкций (принцип «узких мест», принцип «малых случаев») в задачах про разрезание досок на равные части.
- 2. Познакомить со свойствами шахматной раскраски доски.
- 3. Тренировать умение использовать свойства чередования объектов двух типов при решении залач.
- 4. Сформировать представления об использовании шахматной раскраски для доказательства невозможности построения конструкции, об инварианте в процессе.

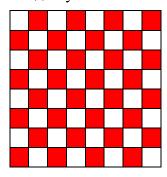
Задача-ключ

На белой клетчатой доске размером 8 × 8 есть одна красная и одна синяя клетка, в которых стоят два маляра – Кузя и Сеня (см.рисунок). Кузя ходит по доске, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку, и каждую вторую посещенную клетку красит в красный цвет. Сеня переходит в соседние по диагонали клетки и красит их все с синий цвет. Так Кузя и Сеня прошли по всем клеткам, до которых смогли добраться. Нарисуй, как теперь выглядит доска. Каких клеток на ней больше: красных или синих?



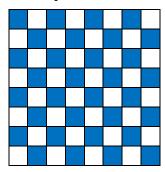
Решение

Сначала рассмотрим Кузю. Он раскрасит доску в шахматном порядке:



Действительно, в такой раскраске каждая вторая клетка, посещаемая Кузей, красного цвета. Значит, другие клетки он покрасить не сможет, а эти обязательно покрасит, так как он посетил все доступные ему клетки доски.

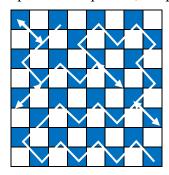
Сеня также раскрасит доску в шахматном порядке:



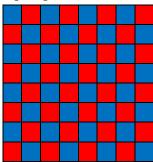
© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

Занятие 15. Шахматная доска

Действительно, он двигается только по диагонали, то есть по клеткам одного цвета (как шахматный слон). Легко проверить, что шахматный слон может попасть на любую клетку пустой шахматной доски того же цвета, с которого он стартовал, например, так:



Посмотрим теперь, как будет выглядит раскраска всей доски в конце:



Действительно, клетки, которые красят Кузя и Сеня не пересекаются. Такая раскраска доски называется «шахматной» раскраской.

На доске 32 красные и 32 синие клетки, значит Кузя и Сеня покрасили поровну клеток.

Ответ: их оказалось поровну.

Замечание

Можно доказать, что Сеня (делающий ходы, как шахматный слон) не может обойти все черные клетки доски по одному разу (поэтому в приведенном обходе есть ходы «туда-обратно», отмечаемые двусторонней стрелкой). Кузя может обойти всю доску, побывав в каждой клетке только один раз (например, проходя сначала по всем клеткам первой горизонтали слева направо, затем по всем клеткам второй горизонтали справа налево, и так далее).

Про шахматную раскраску

Соседними по стороне клетками доски назовем клетки, имеющие общую сторону.

Шахматной раскраской доски называют раскраску каждой клетки доски в один из двух цветов, при которых соседние по стороне клетки имеют разный пвет.

- 1. При шахматной раскраске доски один цвет имеют клетки:
 - через одну по горизонтали или вертикали;
 - на одной диагонали.

Вопросы для построения подводящего диалога

- 1. Сколько всего клеток в фигуре, о которой идет речь в задаче?
- 2. Выделены ли на ней клетки разного цвета? Сколько клеток каждого цвета? Как это количество может пригодиться при решении задачи?
- 3. Наблюдается ли чередование цветов посещаемых клеток при движении фигуры по доске?
- 4. Для задач на разрезание: какие «узкие места» есть у фигуры, которую требуется разрезать?

Как проверить

- 1. Полученный способ разрезания нужно проверить на соответствие всем условиям задачи (количество, равенство, форма, раскраска частей).
- 2. Предположения о свойствах фигуры, связанных с шахматной раскраской доски, можно проверить, используя реальную шахматную доску.

Основные задания

1. Четыре клеточки

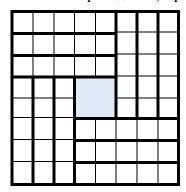
Из шахматной доски вырезали 4 центральные клетки. Разрежь оставшуюся часть этой доски на прямоугольники 1×5 .

Подсказка

Начни разрезание с «узкого места»: угла квадрата. Какие «узкие места» образуются после вырезания первого прямоугольника?

Решение

Единственный (с точностью до осевой симметрии доски) пример разрезания — на рисунке.



Путь к решению

Рассмотрим некоторую угловую клетку доски, например, верхнюю левую. С точностью до осевой симметрии рисунка можно считать, что она находится в горизонтальном прямоугольнике. Тогда в первой горизонтали доски остались 3 клетки, которые можно покрыть только вертикальными прямоугольниками. Продолжая аналогичные рассуждения, можно получить (единственное) разрезание.

2. Уголки

Разрежь клетчатую фигуру, раскрашенную в черный и белый цвета (см. рис. 1), на уголки из трех клеток. Раскраска уголков может быть только такой, как на рис. 2, их нельзя поворачивать и переворачивать.

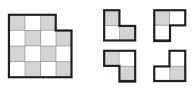


Рис. 1

Рис. 2

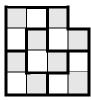
© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

Подсказка

Попробуй начать разрезание с «узкого места», например, с одного из углов фигуры.

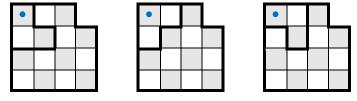
Решение

Единственный возможный способ разрезания — на рисунке.

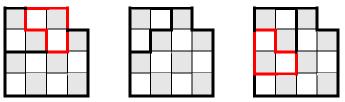


Путь к решению

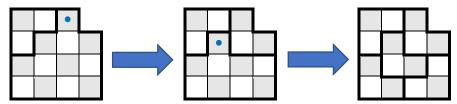
Начнем разрезание с «узкого места»: верхнего левого угла доски. Левая верхняя клетка может лежать в уголках трех видов:



Случаи на самом левом и самом правом рисунке не подходят, так как образуются уголки, раскрашенные неправильным образом (отмечены на рисунке красным).



Средний рисунок дает единственный возможный способ разрезания. Последовательно рассматривая «узкие места» (клетки, которые могут лежать только в уголке одного вида (они отмечены синими точками)), получим его.



3. Новая фигура

Новая шахматная фигура *мустанг* прыгает как конь, но на одну клетку дальше по второму направлению (см. рис.). Мустанга поставили в угловую клетку шахматной доски. Получится ли за несколько ходов привести его в клетку, соседнюю по стороне с начальной?

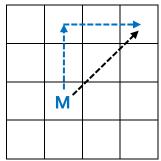


Подсказка

Поставь мустанга на какую-нибудь клетку шахматной доски и сделай им несколько ходов. Что ты замечаешь? Выскажи гипотезу. Как ее обосновать?

Решение

Ход мустанга можно представить как прыжок через одну клетку по диагонали:

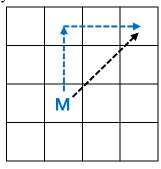


Но на диагоналях шахматной доски все клетки одного цвета, значит, мустанг всегда будет оставаться на клетках одного цвета (как, например, шахматный слон). А клетка, соседняя по стороне с изначальной — другого цвета. Значит, мустанг не сможет на ней оказаться.

Запись на доске и в пособии

Цвета клеток на одной диагонали одинаковые. Мустанг прыгает через одну клетку по диагонали ⇒ Мустанг прыгает по клеткам одного цвета.

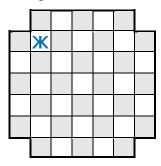
Цвета соседних клеток разные ⇒ Мустанг не может попасть на соседнюю клетку.



Ответ: нет.

4*. Путешествие жука

На доске 7×7 с четырьмя вырезанными угловыми клетками сидел жук (см. рис.). Докажи, что он не сможет проползти по доске таким образом, чтобы посетить каждую клетку (кроме стартовой) по одному разу, если будет переползать в соседние по стороне клетки.



Подсказка

Понаблюдай, на клетках какого цвета оказывается жук, который двигается по доске. А сколько на доске всего клеток каждого цвета?

Решение

Так как соседние по стороне клетки разного цвета, то цвета клеток на пути жука чередуются: БЧБЧБЧ... Из занятия «Чередование» известно, что количество чередующихся объектов двух типов может быть либо равно (если ряд начинается и заканчивается объектами разного типа), либо отличаться на 1 (если ряд начинается и заканчивается объектами одного типа). Но на доске 24 черных и 21 белая клетка. Значит, построить маршрут по всем клеткам не получится.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», <u>www.sch2000.ru</u>

Запись на доске и в пособии

Цвета клеток в пути чередуются \Rightarrow Белых и черных клеток в пути поровну или их число отличается на 1. А на доске 21 белая и 24 черные клетки, $24 - 21 = 3 \Rightarrow$ Построить путь по всем клеткам нельзя.

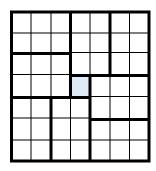
Тренировочные задания

1т. Четыре клеточки

Из доски 7×7 вырезали 1 центральную клетку. Разрежь оставшуюся часть этой доски на прямоугольники 2×3 .

Решение

Возможный пример — на рисунке:



Путь к решению

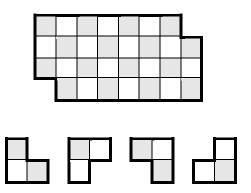
Рассмотрим некоторую угловую клетку доски, например, верхнюю левую. С точностью до осевой симметрии рисунка можно считать, что она лежит в горизонтальном прямоугольнике. Тогда в первой горизонтали доски остались 4 клетки. Если заполнить 3 из них горизонтальным прямоугольником, то останется полоска толщиной в 1 клетку, которую дальше заполнить не получится. Значит, эти 4 оставшиеся клетки нужно заполнить двумя вертикальными прямоугольниками. Действуя аналогично, получим нужное разрезание.

Примечание

Пример на рисунке — единственный с точностью до симметрии доски.

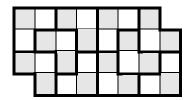
2т. Уголки

Разрежь клетчатую фигуру, раскрашенную в черный и белый цвета (см. рисунок), на уголки из трех клеток с раскраской как в задаче 2.



Решение

Возможный пример — на рисунке:



Путь к решению

Разделим доску на две части, каждая из которых — это квадрат 4 × 4 с отпиленной угловой клеткой. Разрежем правую часть по аналогии с задачей 2, и заметим, что левая часть получается поворотом из правой. Применим к ней аналогичное разрезание, убедившись, что полученные фигуры раскрашены так, как указано в условии.

Также данное разрезание можно получить, начиная как в задаче 2, с уголка, в котором лежит верхняя левая клетка.

Примечание

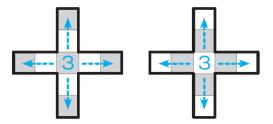
Существуют и другие примеры.

3т. Новая фигура

Новая шахматная фигура *заяц* за ход прыгает через одну клетку по горизонтали или по вертикали. Можно ли зайцем обойти всю шахматную доску, стартовав хоть с какой-нибудь клетки?

Решение

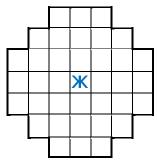
Цвета клеток в горизонтали и вертикали чередуются. Заяц прыгает через клетку ⇒ Заяц прыгает по клеткам одного цвета ⇒ Он не может обойти всю доску.



Ответ: нет.

4т*. Путешествие жука

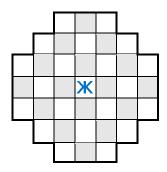
В центральной клетке доски сидел жук (см. рисунок 6). Докажи, что жук не сможет проползти по доске таким образом, чтобы посетить каждую клетку (кроме стартовой) по одному разу, если будет переползать в соседние по стороне клетки.



© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

Решение

Раскрасим клетки доски, по которой ползет жук, в шахматном порядке (см. рис.).

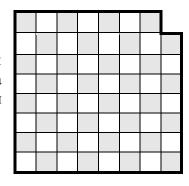


Цвета клеток в пути чередуются \Rightarrow Белых и черных клеток в пути поровну или их число отличается на 1. А на доске 21 белая и 16 черных клеток, $21 - 16 = 5 \Rightarrow$ Построить путь по всем клеткам нельзя.

Дополнительные задания

5. Доска без угла

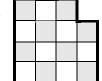
Вася нашел на чердаке старую шахматную доску с отпиленной белой угловой клеткой (см. рис.). Он решил распилить доску на трехклеточные уголки с той же раскраской, что и в задаче 2. Уголки нельзя поворачивать и переворачивать. Как ему выполнить задачу?





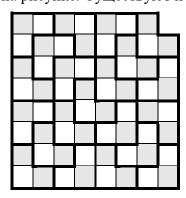
Подсказка

Вспомни разрезание квадрата 4×4 с вырезанной угловой клеткой из задачи 2. Где можно найти части в виде такого квадрата на доске 8×8 ?



Решение

Один из возможных примеров — на рисунке. Существуют и другие примеры.



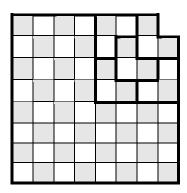
Путь к решению

В задаче 2 уже получился (единственный) пример разрезания квадрата 4×4 с вырезанной угловой клеткой на указанные в условии части (см. рис.).

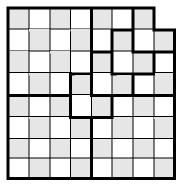
Рассмотрим доску 8 × 8. Выделим на ней такую же область и разрежем ее:



Занятие 15. Шахматная доска



Оставшуюся доску можно разрезать на квадраты 4×4 , но они не разрезаются на уголки из трех клеток. Чтобы получились фигуры, которые можно разрезать на трехклеточные уголки, вырежем еще один уголок:



Разрезания получившихся 3 областей строятся аналогично решению задачи 2.