# Занятие 13. По прямой — кратчайший путь!

## Учебное содержание

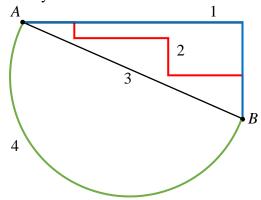
## Предметные цели

- 1. Сформировать представления о неравенстве треугольника на примере сравнения длин сторон прямоугольника и длины его диагонали.
- 2. Развить представления о подсчете значения величины двумя способами.
- 3. Расширить знания о приближенном вычислении величин.
- 4. Познакомить со способом приближенного вычисления длин ломаных и кривых при помощи нити.

### Задача-ключ

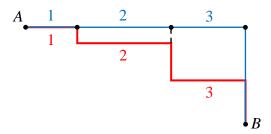
Женя увлекается спортивным ориентированием. У нее есть схема района города, на которой отрезками обозначены дороги. На карте отмечены перекрестки A и B, между которыми Женя построила несколько маршрутов. Попробуй ответить на ее хитрые вопросы.

- 1) Какой путь короче: 1 (синий) или 2 (красный)? Как объяснить это, не вычисляя длины путей?
- 2) С помощью линейки сравни длины путей 1 (синий) и 3 (черный). Как можно назвать путь 3? Сформулируй гипотезу и проверь, что она выполняется для еще нескольких маршрутов.
- 3) Подумай, с помощью какого предмета Женя могла изобразить путь 4 (зеленый). Как можно приближенно найти длину этого пути?



### Решение

1) Эти пути имеют одинаковую длину. Сравним сначала все горизонтальные отрезки путей:



Длина красного пути складывается из трех длин отрезков. Из тех же длин складывается длина синего пути. Значит, горизонтальные части путей равны.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», <u>www.sch2000.ru</u>

Аналогично можно показать, что и вертикальные части путей равны. Значит, длины путей равны.

2) Измерение длины путей с помощью линейки дает следующие оценки.

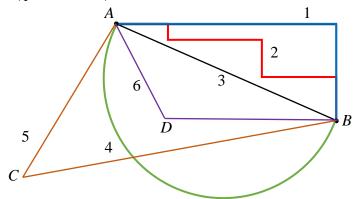
Рассмотрим путь 1 (синий). Его горизонтальный отрезок длиннее 8 см, а вертикальный отрезок длиннее 3 см. Тогда путь 1 длиннее 8+3=11 (см). Длина пути 3 (черного) меньше 10 см. Значит он короче, чем путь 1.

Путь 3 (черный) — отрезок, его можно назвать прямым путем между точками.

Гипотеза: прямой путь между точками короче, чем другие. Проверить непротиворечивость гипотезы можно, изобразив несколько других ломаных с концами в точках A и B. Рассмотрим для примера еще два пути: 5 (коричневый) и 6 (фиолетовый).

Путь 5 (коричневый) состоит из отрезка AC и отрезка BC. Отрезок AC длиннее 6 см, а отрезок BC длиннее 12 см. Значит путь 5 длиннее 6+12=18 (см), то есть он тоже длиннее пути 3.

Пусть 6 (фиолетовый) состоит из отрезка AD и отрезка DB. Отрезок AD длиннее 4 см, а отрезок DB длиннее 6 см. Значит путь 6 длиннее 4+6=10 (см), то есть он тоже длиннее пути 3.



3) Путь 4 (зеленый) напоминает полуокружность. Его можно начертить с помощью циркуля или блюдца. С помощью линейки напрямую оценить длину такого пути затруднительно. Однако можно, например, положить нить, которая дублирует форму пути, и отметить на ней положения точек A и B. После этого нить можно распрямить и найти приблизительную длину пути с помощью линейки.

**Ответ:** 1) длина путей одинакова; 2) путь 1 длиннее; 3) путь нарисован с помощью циркуля или какого-нибудь круглого предмета или от руки, приблизительно найти длину можно с помощью нити.

## Советы по решению задач о длинах ломаных

- 1. Путь в виде ломаной, у которой все углы прямые, можно рассматривать как перемещение отдельно по двум направлениям (например, по вертикали и по горизонтали).
- 2. Кратчайший путь между двумя точками проходит по отрезку, соединяющему эти точки.

## Вопросы для построения подводящего диалога

- 1. <Вопросы>Можно ли сравнить длину с чем-нибудь?
- 2. Можно ли разбить путь на отдельные участки, которые удобно сравнивать?

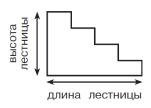
## Как проверить

Теоретические оценки длин можно проверить практически, и наоборот. Если теоретические и практические данные не сходятся, нужно искать ошибку.

### Основные задания

## 1. Ступеньки

Лестница во дворце, полностью покрытая ковром, имела высоту 10 м и длину 15 м. Ширина ее ступеней была равна 30 см, а высота — 20 см. Во время ремонта лестницу заменили лестницей той же длины и высоты. При этом ширина ступеней новой лестницы равна 60 см, а высота — 40 см. На сколько нужно изменить длину ковра, чтобы полностью покрыть новую лестницу?

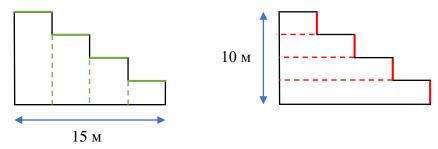


### Подсказка

В этой задаче необязательно вычислять количество ступеней. Изобрази лестницу схематично и отметь на схеме данные задачи. Что ты замечаешь?

#### Решение

Изобразим лестницу схематично (число ступеней реальной лестницы может отличаться). На лестнице покажем горизонтальные и вертикальные отрезки. Сумма длин всех горизонтальных отрезков дает длину лестницы, а сумма длин всех вертикальных отрезков — высоту лестницы. Значит, общая длина ковра для обеих лестниц равна 10 + 15 = 25 (м).



### Запись на доске и в пособии

Сумма длин горизонтальных отрезков равна длине лестницы.

Сумма длин вертикальных отрезков равна высоте лестницы.

10 + 15 = 25 (м) — длина любого ковра, покрывающего лестницу

Длина ковра не зависит от размеров ступеней ⇒ его длину не нужно изменять.

Ответ: длину ковра менять не нужно.

## 2. Непрямое измерение

У Олега есть одинаковые игрушечные кирпичи. Он решил измерить расстояние между противоположными вершинами кирпича, но понял, что приложить линейку внутри кирпича не получится. Помоги Олегу построить такую конструкцию из кирпичей, по которой можно провести измерение.

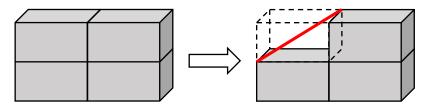
## Подсказка

Попробуй построить конструкцию из кирпичей, в которой получается «пустой» кирпич.

### Решение

Построим из четырех кирпичей стенку  $2 \times 2$  толщиной в один кирпич. Теперь уберем один из верхних кирпичей. Диагональ образовавшегося «пустого» кирпича можно измерить линейкой.

Занятие 13. По прямой — кратчайший путь!

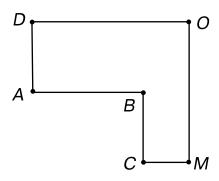


### Замечание

Чтобы школьники лучше поняли условие, им можно показать на рисунке или модели противоположные углы кирпича и попросить объяснить, почему линейку приложить не получается.

## 3. Муравьишки

Муравей Алик побежал по маршруту DOM. В то же время по маршруту DABCM побежал муравей Степа. Степа бежал вдвое быстрее Алика, но в точке B остановился на 10 минут. Муравьи прибежали в точку M в одно время. Сколько времени бежал Алик?



## Подсказка

- 1) Сначала сравни длины путей муравьев.
- 2) За счет чего более медленный муравей смог прийти в точку M в то же время, что и более быстрый? Как это учесть в решении задачи?

### Решение

Так как длины горизонтальных и вертикальных участков путей DOM и DABCM равны, то равны и пути муравьев. Скорость Алика вдвое меньше скорости Бори, поэтому за время, пока Боря прошел бы весь путь, Алик прошел бы только половину пути. Значит, остановка Бори на 10 минут длилась столько времени, сколько Алик проходил половину пути. Отсюда следует, что Алик прошел путь за  $10 \cdot 2 = 20$  (мин).

## Запись на доске и в рабочей тетради

- 1) DO = AB + CM,  $DA + BC = OM \Rightarrow S_A = S_B$ .
- 2) Скорость Алика вдвое меньше скорости Бори ⇒ Время Алика в пути вдвое больше времени Бори (если бы Боря не останавливался).
- 3) Значит, время остановки Бори равно половине времени Алика в пути.

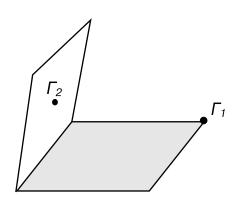
$$(s = v \cdot t = (v : 2) \cdot (t \cdot 2))$$

4)  $10 \cdot 2 = 20$  (мин)

**Ответ:** 20 минут.

## 4. Путь по листу

На согнутом пополам углом листе бумаги сидят две гусеницы: одна ( $\Gamma_1$ ) внизу в углу листа, а другая ( $\Gamma_2$ ) — в середине другой половинки. Гусеница  $\Gamma_2$  ползет по внутренней стороне листа к гусенице  $\Gamma_1$  кратчайшим путем. Нарисуй ее путь и объясни, почему он кратчайший.

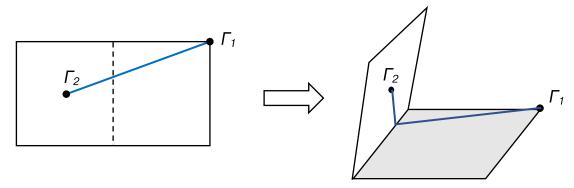


#### Подсказка

Если разогнуть лист, длина пути не изменятся.

### Решение

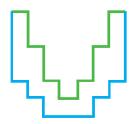
Разогнем лист и получим прямоугольник, разделенный линией сгиба пополам. На плоскости кратчайшее расстояние между точками будет по прямой. Соединим эти точки отрезком. Это и есть кратчайший путь по листу.



## Тренировочные задания

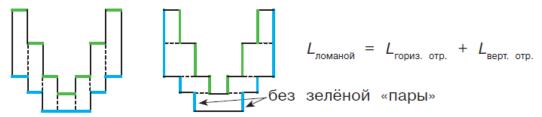
## 1т. Две ломаные

Длина какой ломаной на рисунке больше: синей или зеленой? Объясни свой ответ.



### Решение

Сравним сначала горизонтальные, а потом – вертикальные отрезки двух ломаных.

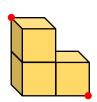


Суммы длин горизонтальных отрезков у обеих ломаных равны, а сумма длин вертикальных отрезков больше у синей ломаной ⇒ Длина синей ломаной больше, чем зеленой.

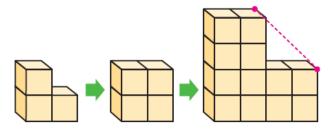
Ответ: синей.

## 2т. Сырная конструкция

В кладовой лежит много кусков сыра в форме одинаковых кубов. Придумай, как измерить расстояние между отмеченными вершинами нарисованной сырной конструкции. Сыр есть нельзя!



### Решение



Добавим сначала 1 кубик (получится параллелепипед), а потом еще 8 (см. рисунок). Искомое расстояние равно длине красного отрезка, его можно измерить линейкой.

## Замечание

Найденное расстояние **не равно** удвоенному расстоянию между противоположными углами одного куба.

## 3т. Туристические маршруты

Два туриста вышли из лагеря в 9 ч утра. Первый турист сначала шел строго на север, потом — на восток, затем снова на север, потом снова на восток, а затем — строго на юг до места стоянки. Второй турист шел строго на восток. Оба туриста пришли на стоянку в 15 ч. Сколько времени шел на восток первый турист, если его скорость была втрое больше скорости второго?

### Решение

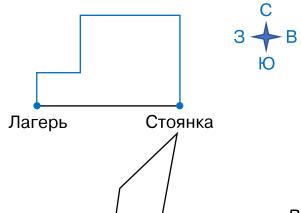
- 1) Туристы прошли равное расстояние на восток (см. схему).
- 2) Скорость 1-го туриста в 3 раза больше скорости 2-го  $\Rightarrow$  1-й шел на восток в 3 раза меньше времени, чем 2-й.

$$(s = v \cdot t = (v \cdot 3) \cdot (t : 3))$$

3) 15 - 9 = 6 (ч) — время каждого туриста в пути

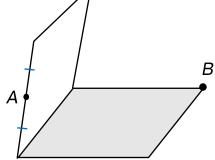
4) 6: 3 = 2 (4)

Ответ: 2 часа.



## 4т. Путь по листу

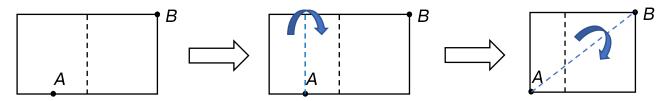
На согнутом пополам углом листе бумаги отмечены точки A (в середине получившейся стороны) и B. Придумай, как только с помощью сгибания бумаги показать кратчайший путь из точки A в точку B по листу.



### Решение

Кратчайший путь идет по отрезку AB на развернутом листе. Перегнем лист так, чтобы A и B были противоположными вершинами прямоугольника, а затем сложим этот прямоугольник по лиагонали AB.

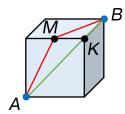
### Запись на доске и в рабочей тетради



## Дополнительные задания

## 5. По граням

Два муравья устроили забег по граням бумажного куба из вершины A в вершину B. Скорости муравьев были одинаковы, но пути они выбрали разные: AKB и AMB, где точка M — середина ребра куба. По какому пути муравей прибежит быстрее?

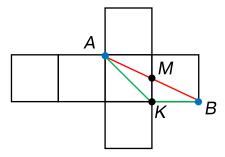


## Подсказка

Попробуй разрезать куб по ребрам так, чтобы его можно было развернуть в плоскую фигуру, не перерезая при этом пути.

## Решение

Изобразим развертку этого куба, на которой данные пути будут отрезками. При этом длина путей на развертке будет равна длине исходных путей.



Путь AMB на развертке прямой, а путь AKB — нет. Так как скорости муравьев равны, быстрее прибежит муравей, выбравший путь AMB.

Ответ: по пути АМВ.