Занятие 12. Чередование

Учебное содержание

Предметные цели

- 1. Познакомить со свойствами чередования объектов двух типов и научить их применять при решении задач.
- 2. Расширить знания о четности и ее свойствах.
- 3. Сформировать представления о четности как инварианте.

Задача-ключ

Ферма, на которой живет козленок Тишка, обнесена оградой. Однажды утром Тишка проснулся на ферме и стал прыгать через ограду. Через некоторое время он выпрыгнул наружу и пошел на лужок щипать траву. Тишка считает, что всего он перепрыгнул через ограду ровно 110 раз. Докажи, что Тишка ошибся.

Решение

1-й способ (чередование)

Обозначим ситуацию, когда Тишка находится внутри ограды, буквой В, а когда он снаружи — буквой С. После каждого перепрыгивания буква меняется, то есть получается чередующийся ряд: СВС... По условию после последнего прыжка Тишка оказался снаружи, значит, ряд заканчивается буквой С: СВС...С. Если объекты в ряду чередуются, а всего их четное число (110), то первый и последний объекты будут различными, то есть Тишка обсчитался.

2-й способ (разбиение на пары)

Разобьем все прыжки Тишки на пары: туда (наружу) и обратно. Тогда после двух таких прыжков он окажется снова внутри ограды. Это будет четное число прыжков. Но так как в итоге Тишка оказался снаружи, то всего Тишка сделал нечетное число прыжков, а 110 — четное число. Значит, он обсчитался.

Запись на доске и в рабочей тетради

Положение Тишки «внутри» или «снаружи» (В и С) чередуются с каждым прыжком.

В начале: В

После 1-го прыжка: С После 2-го прыжка: В

. . .

После 110-го прыжка: В. Но на самом деле Тишка оказался снаружи ⇒ Он обсчитался.

Замечание

Второй способ решения позволяет сделать вывод из второго совета по решению задач.

Свойства чередования

- 1. Если в ряду чередуются объекты двух типов, то на нечетных местах будут стоять объекты того же типа, что и первый, а на четных противоположного.
- 2. Если ряд чередующихся объектов начинается и заканчивается объектами одного и того же типа, то объектов этого типа на один больше. Если ряд начинается объектом одного типа, а заканчивается объектом другого типа, то объектов двух типов поровну.
- 3. Нечетное число объектов двух типов не может чередоваться по кругу.

Вопросы для построения подводящего диалога

- 1. Есть ли в условии задачи объекты двух типов? Что это за типы?
- 2. Чередуются ли эти объекты?
- 3. Что можно сказать о количестве объектов каждого типа?

Как проверить

Гипотезу можно проверить на «малых случаях»: если при маленьких значениях она не выполняется, то возможно неверна и для больших чисел.

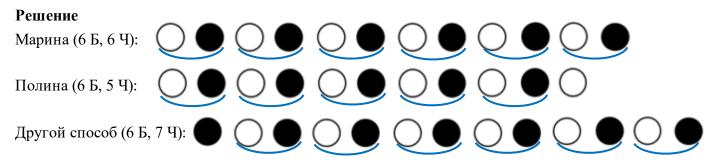
Основные задания

1. Рукоделие (4 мин)

Марина нанизала на нить 6 черных и 6 белых бусин так, чтобы цвета чередовались, а Полина — 6 белых и 5 черных бусин, и у нее цвета тоже чередовались. Нарисуй, как девочки могли расположить бусины на своих нитях. Придумай, как расположить 6 белых и другое число черных бусин (не 5 и не 6), чтобы цвета чередовались.

Подсказка

Начни рисовать бусины так, чтобы цвета чередовались. Как зависит разница количества черных и белых бусин от цветов первой и последней бусин?



Путь к решению

Посмотрим, какого цвета могут быть крайние бусины.

1) Если с одного края оказалась белая бусина, а с другого — черная, значит, все бусины можно разбить на пары БЧ. В каждой такой паре поровну белых и черных бусин, в этом случае всего 6 белых и 6 черных бусин.



2) Если с обоих краев оказались белые бусины, то все бусины, кроме последней, разбиваются на пары БЧ. В каждой паре поровну черных и белых бусин, и тогда всего белых бусин на одну больше. Тогда получится 6-1=5 черных бусин.



3) Если с обоих краев оказались черные бусины, то аналогично пункту 2) всего на 1 черную бусину больше, поэтому всего 6+1=7 черных бусин.



2. Цепочка (4 мин)

12 обезьян выстроились в цепочку и взялись за руки так, что правая рука держит правую руку, а левая — левую. Обезьяна с левого края цепочки держит свою соседку за правую руку. За какую руку держит свою соседку обезьяна с другого края цепочки?

Подсказка

Нарисуй цепочку из нескольких обезьян. Что ты замечаешь?

Решение

Будем смотреть на цепочку слева направо и записывать руки, которые подают обезьянки своим левым и правым соседкам:

Так как «типы» обезьянок (ЛП, ПЛ) чередуются, то 12-я обезьянка будет типа ПЛ, а значит подаст соседке слева правую руку.

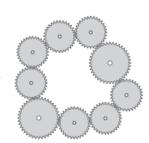
Запись на доске и в рабочей тетради

1-я обезьянка: ЛП. Типы (ЛП, ПЛ) чередуются \Rightarrow 12-я обезьянка: ПЛ. Она держит соседку правой рукой.

Ответ: правой.

3. Механизм (5 мин)

Петя разобрал и собрал часовой механизм, и у него получился цикл из шестеренок, как на рисунке. Старший брат сказал, что Петя ошибся, так как эти шестеренки не могут вращаться вместе. Объясни, почему брат Пети прав.



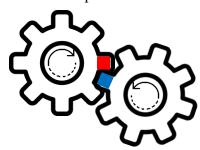
Подсказка

Пусть некоторая шестеренка вращается по часовой стрелке. Как вращаются ее «соседи»?

II ступень. Занятие 12. Чередование

Решение

Рассмотрим две соседние сцепленные шестеренки:



Пусть левая из них вращается по часовой стрелке. Тогда зубец, отмеченный красным цветом, будет перемещаться «вниз» и уводить за собой зубец второй шестеренки, отмеченный синим цветом. Это значит, что вторая шестеренка будет вращаться против часовой стрелки. Значит, для того чтобы все шестеренки вращались, их направление вращения должно чередоваться в кругу. Но всего шестеренок 9 (нечетное число), а нечетное число объектов двух типов не может чередоваться по кругу.

Запись на доске и в рабочей тетради

Соседние шестеренки крутятся в разные стороны (одна по часовой стрелке, другая — против) ⇒ Значит, направления вращения чередуются.

Всего по кругу 9 шестеренок — нечетное число \Rightarrow Чередование невозможно \Rightarrow Шестеренки не будут вращаться.

Замечание

Для понимания механики вращения шестеренок школьникам может понадобиться реальная модель.

4*. Пиратский сундук (5 мин)

У каждого из 8 пиратов было по рубину. Во время ссоры каждый пират один раз либо отобрал у другого рубин и положил в сундук, либо взял себе рубин из сундука. Вначале сундук был пуст, а после ссоры пираты насчитали в нем 3 рубина. Докажи, что они ошиблись.

Подсказка

Как изменяется число рубинов в сундуке после каждого «хода» пирата?

Решение

1-й способ (чередование)

Заметим, что изначально в сундуке было 0 рубинов. Если пират отбирает рубин у другого пирата и кладет его в сундук, то количество рубинов в сундуке увеличивается на 1, а если забирает рубин из сундука — уменьшается на 1. В любом случае, общее количество рубинов в сундуке изменяется на 1 с каждым «ходом» пирата. При этом четность количества рубинов в сундуке с каждым «ходом» чередуется. Так как 0 — четное число, а всего пиратов — 8 штук, то после того, как «сходят» все 8 пиратов, в сундуке окажется четное число рубинов, а 3 — нечетное число. Значит, 3 рубина в сундуке оказаться не могло.

2-й способ (четность суммы чисел)

Если в сундуке оказалось 3 рубина, значит число пиратов, клавших в него рубин, было на 3 больше, чем число пиратов, забиравших рубин. Тогда эти два количества имеют разную четность. Так как сумма двух чисел разной четности — нечетна, то общее количество пиратов, равное сумме этих чисел, не может равняться 8 (H + H = H).

Запись на доске и в рабочей тетради

1-й способ

 Ч
 1 руб. (Н)
 Н

 Н
 1 руб. (Н)
 Ч

Четность числа рубинов в сундуке чередуется с каждым «ходом» пирата.

В начале: 0 руб. — Ч После 1-го пирата: Н После 2-го пирата: Ч

. . .

После 8-го пирата: Ч. Но 3 — нечетное число ⇒ Пираты ошиблись.

2-й способ

 Π – количество пиратов, положивших рубин в сундук

B – количество пиратов, взявших рубин из сундука

1) $\Pi - B = 3 \Rightarrow \Pi = B + 3$

2) Π и B разной четности \Rightarrow Сумма $\Pi + B$ — нечетна

3) Но $\Pi + B = 8$ — четное число \Rightarrow Пираты ошиблись.

Тренировочные задания

1т. Идеальный бутерброд

Повар Вильям Колбаскин изобрел рецепт идеального бутерброда из чередующихся слоев хлеба и колбасы. Всего в бутерброде 17 слоев, а снизу — ломтик хлеба. Что находится сверху бутерброда — хлеб или колбаса?

Решение

17 — нечетное число \Rightarrow Все слои, кроме верхнего, можно разбить на пары XK (X — хлеб, K — колбаса) \Rightarrow Наверху кусок хлеба.

Ответ: хлеб.

2т. Башня

Петя построил на полу башню из 25 деталей, каждая деталь — как на рисунке (вид сбоку). Он ставил детали друг на друга гранями одинаковой ширины. Средняя деталь стоит широкой гранью вниз. Какой гранью стоит на полу нижняя деталь?



Решение

- а) Детали стыкуются одинаковыми частями, тогда детали, у которых внизу узкая часть, чередуются с деталями, у которых внизу широкая часть.
- б) В середине стоит 13-я деталь.
- в) 1-я деталь стоит так же, как и 13-я деталь, значит, она стоит широкой частью вниз, то есть на полу широкая часть.

Запись на доске и в рабочей тетради

- 1) Направления деталей чередуются (см. рис.).
- (25-1): 2=12 (д.) выше и ниже средней
- 3) 12 + 1 = 13 номер средней детали
- 4) Из-за чередования 13-я деталь направлена так же, как 1-я ⇒ ⇒ Внизу широкая грань.

Ответ: широкая.

Вопросы для подводящего диалога

- 1. Какой по счету идет средняя деталь?
- 2. Нарисуй башню из нескольких фигур. Что ты замечаешь?



Левую шестеренку механизма на рисунке вращают по часовой стрелке. На вал шестеренки с другой стороны намотана веревка с привязанным грузом. Поднимается или опускается груз?

Решение

Если одна шестеренка вращается по часовой стрелке, то соседние — против часовой. Всего в системе 8 шестеренок — четное число, значит, восьмая вращается против часовой стрелки. По рисунку видно, что веревка намотана также против часовой стрелки, поэтому будет разматываться, а груз — опускаться.

Запись на доске и в рабочей тетради

Всего шестеренок 8 (Ч), направления вращения у них чередуются.

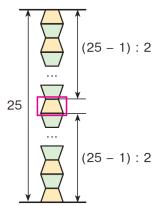
1-я (нечетная) шестеренка вращается по часовой стрелке \Rightarrow 8-я (четная) вращается против часовой стрелки.

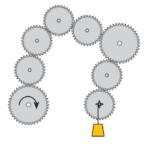
Нитка намотана так же \Rightarrow Груз опускается.

Ответ: опускается.

4т*. Мешок яблок

Дети собирали яблоки в мешок. После того как они собрали 100 яблок, каждый из 30 детей по очереди подходил к мешку и либо докладывал туда 3 яблока, либо съедал 3 яблока из мешка. После того как каждый ребенок подошел к мешку по разу, яблоки в мешке пересчитали и получили 125 яблок. Докажи, что дети обсчитались.

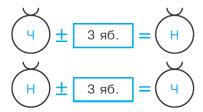




Решение

Заметим, что изначально в мешке было четное число яблок, а после каждого ребенка количество яблок менялось на 3, то есть четность количества яблок в мешке менялась. После первого ребенка окажется нечетное число яблок, после второго — четное, значит, в конце в мешке окажется четное число яблок, а 125 — число нечетное. Значит, в мешке не могло остаться 125 яблок.

Запись на доске и в рабочей тетради



Четность числа яблок в мешке чередуется с каждым подошедшим.

В начале: 100 яб. — Ч После 1-го раза: Н После 2-го раза: Ч

. . .

После 30-го раза: Ч. Но 125 — нечетное число ⇒ Дети обсчитались.

Замечание

Существует и другой несложный способ решения, который могут предложить школьники, уже знакомые со свойствами остатков. Способ основан на инвариантности (неизменности) остатка от деления на 3 при прибавлении или вычитании числа, кратного 3. Приведем его.

Заметим, что число 100 при делении на 3 имеет остаток 1, а число 125 — остаток 2 при делении на 3. При этом число яблок в мешке меняется на 3 после каждого ребенка, значит, остаток при делении на 3 не меняется. Таким образом, в мешке не могло остаться 125 яблок.

Дополнительные задания

5. Одной прямой

Существует ли а) десятиугольник, б) тринадцатиугольник, все стороны которого можно пересечь одной прямой, не проходящей ни через какую вершину?

Подсказка (к пункту а)

Сначала попробуй нарисовать четырехугольник, все стороны которого можно пересечь одной прямой, не проходящей через вершины. Как можно «добавить» вершины и стороны?

Подсказка (к пункту б)

На какие части многоугольник делит прямую? На какие 2 типа можно поделить эти части?

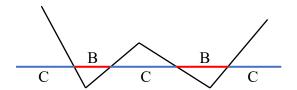
Решение

а) Один из возможных примеров — на рисунке.



II ступень. Занятие 12. Чередование

б) Заметим, что прямая делится точками пересечения с многоугольником на лучи и отрезки. При этом каждый из этих отрезков и лучей целиком лежит внутри или снаружи многоугольника, а объекты этих двух типов чередуются: СВСВ...



Кроме того, начальный и конечный лучи находятся снаружи многоугольника, то есть всего должно быть четное число смен типа. Поэтому прямая должна пересекать многоугольник в четном числе точек, то есть пересекать четное число сторон. Значит, все стороны 13-угольника она не может пересечь.

Ответ. а) да (один из возможных примеров — на рисунке); б) нет.