ЗАНЯТИЕ 9. МАЛЫЕ СЛУЧАИ

Учебное содержание

Предметные цели

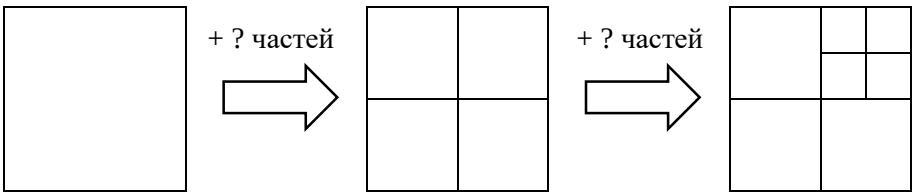
1. Развить умение пользоваться методами удобного счета[1] (методом дополнения, методом разбиения на группы).
2. Тренировать умение находить закономерности и выдвигать гипотезы.
3. Познакомить с методом «малых случаев» для опровержения гипотез.
4. Тренировать умение доказывать верные гипотезы.
5. Развить знания о функциональных зависимостях и формулах.

Задача-ключ

У Милы есть очень большой лист бумаги, и она хочет сделать из него много заготовок для снежинок. Каждый раз она берет какой-то кусок и разрезает его на 4 части. Сколько частей у нее получится после 100 таких разрезаний?

Решение

Для того, чтобы выделить закономерность, составим схему:



1 часть 4 части 7 частей

Заметим закономерность: количество частей после одного разрезания увеличивается на 3. Докажем эту гипотезу. При одном разрезании «убирается» одна разрезаемая часть (так как мы ее больше не считаем) и «добавляются» 4 новых части. Можно записать в виде равенства:

$$Ч - 1 + 4 = Ч + 3$$

Так как в начале была одна часть, а каждым разрезанием добавляется 3 части, то можно составить формулу зависимости количества частей от количества разрезаний:

$$Ч = 1 + 3 \cdot Р$$

В задаче Р = 100, подставив, получаем:

$$Ч = 1 + 3 \cdot 100 = 301$$

Запись на доске и в рабочей тетради

За 1 разрезание: –1 часть (которую разрезали) + 4 части (новых).

Ч – 1 + 4 = Ч + 3. ⇒ Добавляется по 3 части.

Разрезы	0	1	2	3	4	5
Части	1	4	7	10	13	16

+ 3 + 3 + 3 + 3 + 3

[1] См. «Математический театр. 3 класс», занятие №1 («Умный счет»).

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

Составим формулу: Ч = 1 + 3 · Р.

Подставим Р = 100:

1 + 3 · 100 = 301 (ч.)

Ответ: 301 часть.

Советы по использованию малых случаев

1. Гипотезу (например, закономерность, формулу), удобно проверить при маленьких значениях переменной (на **малых случаях**).
2. Проверка малых случаев, не доказывает, что гипотеза верна, но может:

   а) показать, что гипотеза ошибочна; б) подсказать метод решения задачи.

Вопросы для построения подводящего диалога

1. Какие величины даны в задаче?
2. Какие зависимости возникают между величинами в задаче? Сформулируй гипотезу.
3. Какую величину можно изменить, чтобы проверить гипотезу на «малых случаях»?
4. Какими методами удобного счета можно воспользоваться?

Как проверить

В задаче о подсчете количества фигур (клеток, палочек, и так далее) можно проверить вычисления непосредственным подсчетом фигур на рисунке.

Основные задания

1. Необычные шахматы (5 мин)

Вася придумал разновидность шахмат, в которой фигуры изначально заполняют не только первые две горизонтали с каждой стороны, но и первые две вертикали с каждой стороны. Сколько всего фигур в Васиной игре на доске: а) 8 × 8, б) 15 × 15?

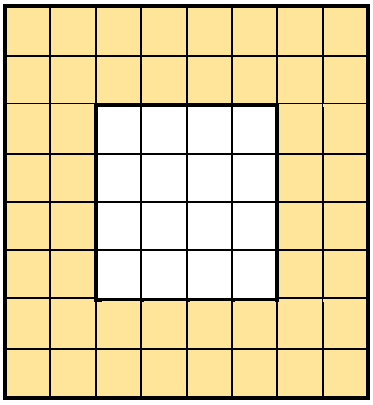
Подсказка 1

Сначала нарисуй доску 8 × 8 и вычисли количество фигур методом дополнения.

Подсказка 2

Сначала нарисуй доску 8 × 8 и разрежь область, заполненную фигурами, на прямоугольники.

Решение



Изобразим доску и закрасим на ней клетки, на которых стоят фигуры.

1-*й способ (метод дополнения)*

а) Используем **метод дополнения** для упрощения счета. Заметим, что количество клеток с фигурами равно разности общего количества клеток доски 8 × 8 и количества клеток в свободном от фигур квадрате 4 × 4. Длина стороны внутреннего квадрата в клетках на 4 меньше, чем длина стороны внешнего квадрата (так как убрали по 2 клетки справа и слева). Итак, количество фигур на доске равно: 8 · 8 – 4 · 4 = 48.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

б) Аналогично на большой доске будет: $15 \cdot 15 - (15 - 4) \cdot (15 - 4) = 104$ (ф.)

Запись на доске и в рабочей тетради

а) Используем метод дополнения.

1) $8 \cdot 8 = 64$ (кл.) — всего

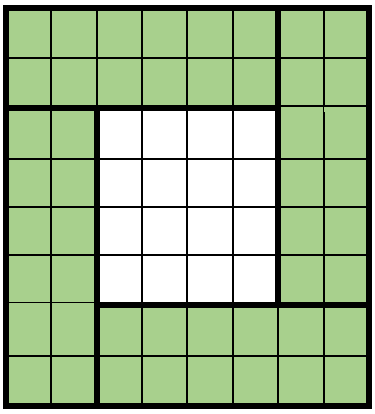
2) $8 - 2 \cdot 2 = 4$ (кл.) — сторона «пустого» квадрата

3) $4 \cdot 4 = 16$ (кл.) — пустых

4) $64 - 16 = 48$ (кл.) — с фигурами

2-й способ (метод разбиения на группы)

а) Для упрощения счета разрежем область с фигурами на равные прямоугольники так, как показано на рисунке:



Длина одного такого прямоугольника равна $8 - 2 = 6$ кл., а ширина — 2 кл. Значит, общее количество клеток, занятых фигурами:

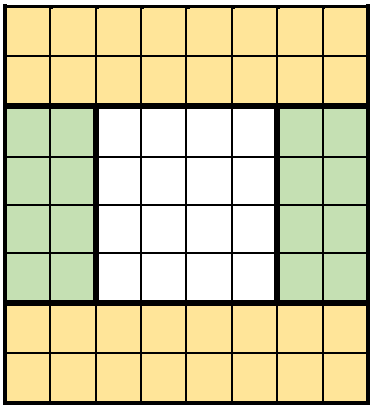
$$((8 - 2) \cdot 2) \cdot 4 = 48 \text{ (кл.)}$$

б) Аналогично получаем:

$$((15 - 2) \cdot 2) \cdot 4 = 104 \text{ (кл.)}$$

3-й способ (метод разбиения на группы)

а) Для упрощения счета разрежем доску на прямоугольники так, как показано на рисунке:



Заметим, что длина желтого прямоугольника на $2 + 2 = 4$ клетки больше ширины зеленого, а ширина желтого равна длине зеленого прямоугольника. Значит, число занятых фигурами клеток равно:

$$(8 \cdot 2) \cdot 2 + ((8 - 4) \cdot 2) \cdot 2 = 32 + 16 = 48 \text{ (кл.)}$$

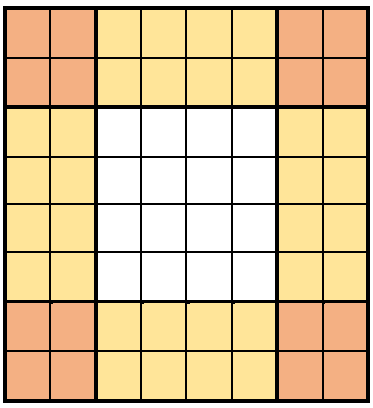
б) Аналогично получаем:

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

$$(15 \cdot 2) \cdot 2 + ((15 - 4) \cdot 2) \cdot 2 = 60 + 44 = 104 \text{ (кл.)}$$

4-й способ (прием «учти лишнее»[2]*)*

а) Рассмотрим угловые квадраты:



1) $(8 \cdot 2) \cdot 4 = 64$ (ф.) — если бы не было пересечений

2) $(2 \cdot 2) \cdot 4 = 16$ (ф.) — в пересечении

3) $64 - 16 = 48$ (ф.)

б) Аналогично для большой доски число клеток, занятых фигурами равно:

$$(15 \cdot 2) \cdot 4 - (2 \cdot 2) \cdot 4 = 120 - 16 = 104 \text{ (кл.)}$$

Ответ: а) 48 фигур; б) 104 фигуры.

2. Квадрат и квадратики (5 мин)

а) Разрежь квадрат 3 × 3 клетки на 6 квадратов (не обязательно одинаковых). б) Придумай, как можно разрезать квадрат 30 × 30 клеток на 60 квадратов. Изобрази это разрезание схематично или опиши словами.

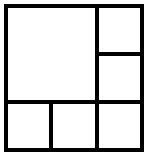
Подсказка

а) Какого размера квадраты могут быть в разрезании? Расположи их.

б) Найди в задании (а) связь между количеством квадратных частей и количеством клеток вдоль стороны квадрата. Как можно сохранить такое же соотношение для квадрата большего размера?

Решение

а) Квадрат можно разрезать на 6 квадратиков следующим образом:

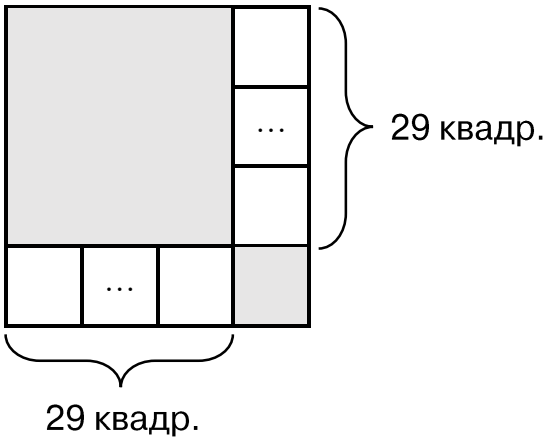


б)

Будем действовать по аналогии с решением пункта а): выделим один большой квадрат, а оставшуюся часть («уголок») разделим на равные квадраты меньшего размера:

[2] Метод «учти лишнее» еще не вводился на занятиях «Математического театра» и решение, основывающееся на данном методе, дано в ознакомительных целях.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru



Проверка: 29 · 2 + 2 = 60 (квадр.).

Ответ: на рисунках.

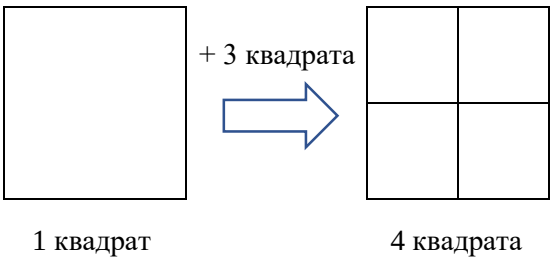
Замечание 1

Приведенное в пункте а) разрезание квадрата 3 × 3 на 6 квадратов по линиям сетки — единственное с точностью до поворота фигуры. Это несложно проверить. Из квадрата 3 × 3 по линиям сетки можно вырезать только квадраты 1 × 1, 2 × 2 (не считая сам квадрат 3 × 3). Но если разрезать только на квадраты 1 × 1, то получится 9 квадратов. Значит, в разрезании должен быть квадрат 2 × 2. Он может быть только один и должен накрывать одну из угловых клеток большого квадрата. Оставшаяся часть разрезается только на квадраты 1 × 1.

Замечание 2

В условии задачи не сказано, что разрезы должны идти по сторонам клеточек исходного квадрата. Поэтому подходит и другой способ решения, связанный с гипотезой из задачи-ключ (и основанный на методе последовательного конструирования, который будет подробно рассматриваться в более старших классах).

Любой квадрат можно разрезать на 4 равных квадрата одним вертикальным и одним горизонтальным разрезом. При этом к общему количеству квадратов добавляется 3:



Будем каждый раз производить такой разрез с каким-то из имеющихся квадратов. Сначала было 6 квадратов, должно получиться 60. Значит, нужно добавить 60 – 6 = 54 квадратика по 3 за один раз, то есть за 54 : 3 = 18 таких разрезов мы получим ровно 60 квадратиков.

3. Палочки (5 мин)

Из палочек длиной 1 см составили клетчатый квадрат 12 × 12 см. Сколько всего палочек использовали? (Квадрат разделен палочками на квадратики со стороной 1 см.)

Подсказка

1. На какие две группы можно разделить все палочки? Сколько всего линий в каждой группе?
2. Сначала посчитай палочки для квадрата 2 × 2 см.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

Решение

Воспользуемся **методом разбиения на группы**.

В данном случае все палочки можно разделить на горизонтальные и вертикальные.

В квадрате 12 столбцов, которые разделены 11-ю вертикальными линиями + 2 линии по краям. ⇒ Всего 13 вертикальных линий по 12 палочек в каждой. Итого всего 12 · 13 = 156 вертикальных палочек. Так как строк столько же, сколько столбцов, то горизонтальных палочек столько же, то есть 156. Значит, квадрат составлен из 156 · 2 = 312 палочек.

Запись на доске и в рабочей тетради

1) 12 – 1 = 11 (лин.) — разделяют столбцы

2) 11 + 2 = 13 (лин.) — вертикальных (по 12 палочек)

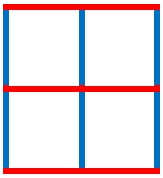
3) 12 · 13 = 156 (п.) — вертикальных (столько же горизонтальных)

4) 156 · 2 = 312 (п.)

Ответ: 312 палочек.

Путь к решению (анализ «малых случаев»)

Проведем **исследование на «малых случаях»**. Рассмотрим «малый случай» — квадрат 2 см × 2 см. Выделим горизонтальные палочки красным цветом, а вертикальные — синим.

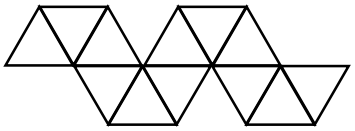


Сначала обратим внимание на столбцы. Всего на рисунке 2 столбца, которые разделены 1 синей линией (вспомним, что число частей на 1 больше, чем число разрезов[3]). Еще 2 синие линии находятся вдоль левой и правой стороны квадрата. Значит, всего 3 синие линии, каждая состоит из двух палочек. Отсюда всего «синих» палочек будет 2 · 3 = 6.

Аналогично на рисунке 6 красных палочек. Всего 6 + 6 = 12 палочек.

4*. Змейка (5 мин)

Из 12 равных треугольников, длина каждой стороны которых равна 1 см, сложили «змейку» (см. рис.). Ее периметр равен 14 см. Подобный узор продолжили так, чтобы получилась фигура из 600 треугольников. Найди периметр полученной фигуры. (Длина внутренних отрезков в периметре не учитывается.)



Подсказка 1

Найди вклад в периметр каждого из треугольников.

Подсказка 2

Определи, на сколько увеличивается периметр фигуры при добавлении одного элемента из трех треугольников.

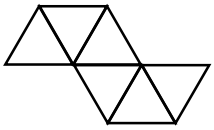
Решение

1-*й способ (подсчет)*

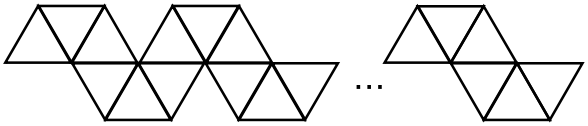
[3] См. «Математический театр. 4 класс», занятие 4.8 «Эффект «плюс-минус один».

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

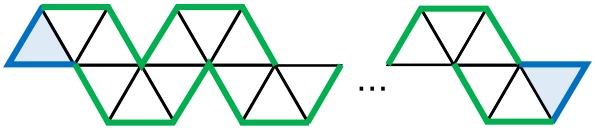
Заметим, что 600 треугольников «длинной» змейки можно разделить на повторяющиеся группы из 6 треугольников:



Поэтому «длинную» змейку можно изобразить схематично так:



Каждый треугольник, кроме крайнего левого и крайнего правого, дает 1 см к периметру фигуры (отмечено зеленым), а крайние треугольники дают по 2 см (отмечено синим):

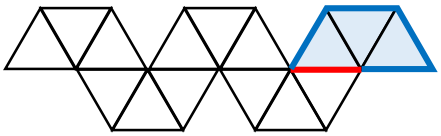


Поэтому периметр фигуры можно посчитать так:

$2 + 2 + 1 \cdot (600 – 2) = 602$ (см)

2-й способ (последовательное конструирование)

Добавим к змейке одну группу из трех треугольников[4]. При этом от периметра отнимется 1 см (линия «склеивания», отмеченная красным цветом), но добавится 4 см (остальная часть внешнего периметра, отмеченная синим цветом). Таким образом, периметр увеличится на 3 см.



К изначальным 12 треугольникам нужно добавить 600 – 12 = 588 треугольников, то есть периметр станет равен $14 + 3 \cdot (588 : 3) = 14 + 588 = 602$ см.

Запись на доске и в рабочей тетради

1-й способ

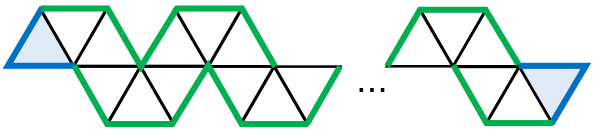
1) $600 – 2 = 589$ (тр.) — добавляют по 1 стороне

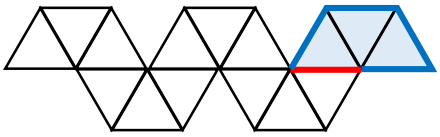
2) $2 \cdot 2 + 1 \cdot 589 = 602$ (см)

2-й способ

1) $4 – 1 = 3$ (см) — добавляется с одним рядом

2) $14 + 3 \cdot (588 : 3) = 14 + 588 = 602$ (см)





Ответ: 602 см.

Замечание 1

В 1-м способе решения указано, что каждый «внутренний» треугольник змейки (то есть треугольник, не являющийся крайним левым или крайним правым) дает 1 см к периметру фигуры. Поясним, почему это утверждение верно. Каждый «внутренний» треугольник соединен сторонами с двумя треугольниками. Эти 2 «соединяющие» стороны не входят во внешнюю границу получающейся фигуры. Получается, что остается 3 – 2 = 1 сторона, входящая во внешнюю границу. С другой стороны, «крайние» треугольники соединены стороной только

[4] Аналогичное рассуждение можно провести, добавляя «группу» из 6 треугольников.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

с одним треугольником, поэтому 3 – 1 = 2 стороны этих треугольников входят во внешний периметр.

Замечание 2

Во 2-м способе решения не важно, какая группа из трех треугольников добавляется: «верхняя» или «нижняя». В любом случае эта группа соединена одной стороной с предыдущей цепочкой, а еще две пары сторон треугольников не войдут во внешнюю границу фигуры, так как соединяют три треугольника из данной группы. Этих данных достаточно, чтобы определить, на сколько увеличивается периметр фигуры.

Тренировочные задания

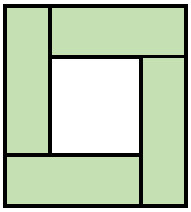
1т. Коробка конфет

В каждой клетке квадратной клетчатой доски лежало по конфетке. Дети съели все 56 конфет вдоль границы доски. Сколько конфет осталось на доске?

Решение

1-*й способ (метод разбиения на группы)*

Разделим внешнюю границу доски на равные прямоугольники с шириной в 1 клетку:



1) 56 : 4 = 14 (к.) — было в прямоугольнике

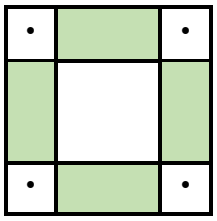
2) 14 + 1 = 15 (к.) — было вдоль стороны

3) 15 · 15 = 225 (к.) — было на доске

4) 225 – 56 = 169 (к.)

2-*й способ (метод разбиения на группы)*

а) Разрежем внешнюю границу доски без угловых клеток на равные прямоугольники так, как показано на рисунке:



1) 56 – 4 = 52 (к.) — было на внешней границе без угловых

2) 52 : 4 = 13 (к.) — было в прямоугольнике

3) 13 + 2 = 15 (к.) — было вдоль стороны

4) 15 · 15 = 225 (к.) — было на доске

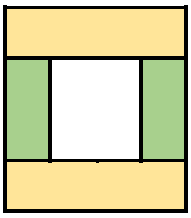
5) 225 – 56 = 169 (к.)

Ответ: 169 конфет.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

3-й способ (метод разбиения на группы)

а) Разрежем внешнюю границу доски на прямоугольники так, как показано на рисунке:



1) 1 + 1 = 2 (к.) — больше в желтом прямоугольнике, чем в зеленом

2) (56 – 2 · 2) : 4 = 13 (к.) — в зеленом прямоугольнике

3) 13 + 2 = 15 (к.) — было вдоль стороны

4) 15 · 15 = 225 (к.) — было на доске

5) 225 – 56 = 169 (к.)

Замечание 1

Метод дополнения не подходит для решения данной задачи, так как в ней неизвестны размеры квадратов. Поэтому важно разобрать оба основных подхода к решению задачи №1 (метод дополнения и метод разбиения на группы).

Замечание 2

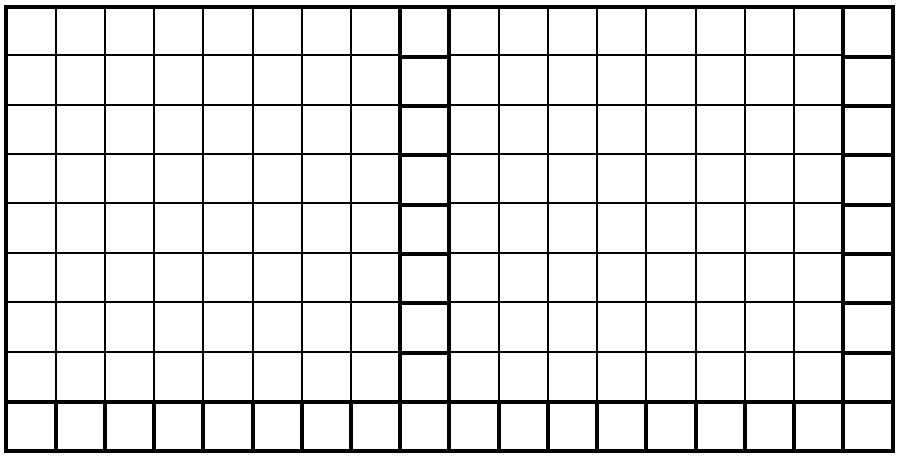
Для проверки любого из представленных решений может помочь метод «малых случаев».

2т. Прямоугольник и квадратики

Разрежь прямоугольник размером 18 × 9 клеток на 36 квадратов так, чтобы все разрезы шли по сторонам клеток.

Решение

Пример возможного разрезания — на рисунке. Существуют и другие примеры.



Проверка: 18 + 8 · 2 + 2 = 36 (кв.)

Путь к решению

Заметим, что прямоугольник 18 × 9 можно мысленно разрезать на два квадрата 9 × 9. В ходе решения задачи № 2 мы узнали, как можно разделить квадрат $n \times n$ на $2n$ квадратов. Разделяя каждый из квадратов на 2 · 9 = 18 квадратов, получим нужное разрезание прямоугольника на 36 квадратов.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

3т. Замок

В основании замка квадрат со стороной 200 м. Замок разделён на залы размером 20 × 20 м. Между каждыми двумя залами с общей стеной есть дверь. Других дверей в замке нет (наружу ведут только главные ворота). Сколько всего дверей в замке (не считая главных ворот)?

Решение

Все двери можно разделить на те, которые находятся в «горизонтальных» и «вертикальных» рядах.

1) 200 : 20 = 10 (з.) — вдоль одной стены

2) 10 – 1 = 9 (р.) — с дверями

3) 9 · 10 · 2 = 180 (дв.)

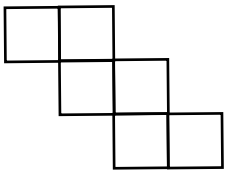
Ответ: 180 дверей.

Замечание

В решении используется факт о том, что рядов стен с дверями на 1 меньше, чем рядов залов. Это так, потому что они служат «распилами» между рядами залов.

4т*. Змейка

Из 6 квадратиков 1 × 1 см (см. рисунок) сложили «змейку», ее периметр равен 14 см. Подобный узор продолжили так, чтобы получилась «змейка», из 1000 квадратиков. Найди периметр полученной фигуры.



Решение

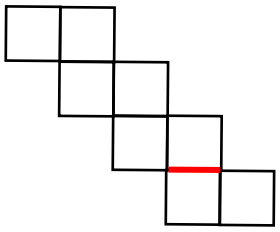
1-*й способ (подсчет)*

Каждый квадратик, кроме левого верхнего и правого нижнего дает 2 см к периметру фигуры, а крайние квадратики дают по 3 см. Поэтому периметр фигуры можно посчитать так:

3 · 2 + 2 · (1000 – 2) = 2002 (см)

2-*й способ (последовательное конструирование)*

Добавим к змейке одну группу из двух квадратиков. При этом от периметра отнимется 1 см (линия «склеивания», отмеченная красным цветом), но добавится 5 см (остальная часть внешнего периметра). Таким образом, периметр увеличится на 4 см.



К изначальным 6 квадратам нужно добавить 1000 – 6 = 994 квадрата, то есть периметр станет равен 14 + 4 · (994 : 2) = 14 + 1998 = 2002 см.

Запись на доске и в рабочей тетради

1-*й способ*

1) 1000 – 2 = 998 (кв.) — добавляют по 2 стороны

2) 3 · 2 + 2 · 998 = 2002 (см)

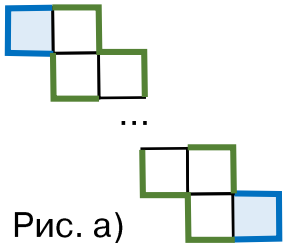


Рис. а)

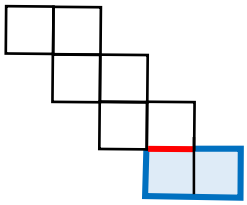


Рис. б)

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru

2-й способ

1) 5 – 1 = 4 (см) — добавляется с одним рядом

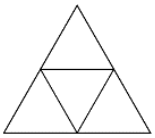
2) (1000 – 6) : 2 = 497 (рядов) — добавляется

3) 14 + 4 · 497 = 2002 (см)

Ответ: 2002 см.

Дополнительные задания

5. Елочки-палочки



Из палочек длиной 1 см составили «елочку» — треугольник со сторонами по 12 см, разбитый на маленькие треугольнички с длиной стороны 1 см (на рисунке — пример «ёлочки» со сторонами по 2 см). Сколько всего палочек использовали?

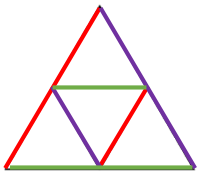
Подсказка

Вспомни решение задачи №3. На какие три группы можно разделить все палочки?

Решение

1-й способ (метод разбиения на группы)

Все палочки можно разделить на те, которые идут горизонтально, с наклоном вправо и с наклоном влево:

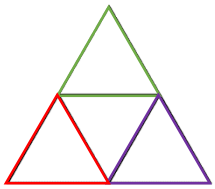


Для маленького треугольника получается 3 · (1 + 2) = 9 палочек. При этом в каждом следующем ряду количество одинаково ориентированных палочек на 1 больше, чем в предыдущем.

Тогда для большого треугольника получается 3 · (1 + 2 + … + 12) = 3 · (13 · 6) = 234 палочки.

2-й способ (метод разбиения на группы).

Заметим, что все палочки можно разбить на группы по 3, образующие треугольник со сторонами в 1 см:



Тогда на первом уровне сверху будет один такой треугольник, на втором уровне — 2 треугольника, и так далее. На нижнем уровне будет 12 треугольников (потому что в основании треугольника будут лежать 12 палочек). Итого получается:

$$3 \cdot (1 + 2 + \ldots + 12) = 3 \cdot (13 \cdot 6) = 234 \text{ палочки.}$$

Ответ: 234 палочки.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», www.sch2000.ru