

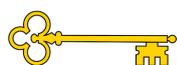
## ЗАНЯТИЕ 17. ПОСЛЕДНЯЯ ЦИФРА

### Учебное содержание

#### Предметные цели

1. Развить представления о свойствах чисел, связанных с делимостью и остатками, на примере рассмотрения последней цифры числа.
2. Познакомить с признаком делимости на 10.
3. Сформировать представления о периодичности чисел с определенным остатком при делении на число, о связи остатков чисел при делении на число с остатком их суммы, разности и произведении при делении на то же число.

#### Задача-ключ



Задумайте два однозначных числа и найдите последнюю цифру в записи их суммы и произведения. Затем замените одно из них на некруглое двузначное и найдите последнюю цифру в записи их суммы и произведения. По возможности сделайте то же, заменив и второе число на некруглое двузначное. Сформулируйте правило нахождения последней цифры в записи результата суммы и произведения двух чисел.

#### Решение

Последняя цифра в записи суммы (произведения) двух чисел равна последней цифре суммы (произведения) последних цифр в записи этих чисел.

#### Свойства последних цифр чисел

1. Если число оканчивается на 0, то оно **делится** на 10.
2. Остаток от деления числа на 10 равен **последней** цифре этого числа.
3. Последнюю цифру суммы, разности и произведения чисел можно определить, выполнив соответствующие действия с **последними цифрами** в записи этих чисел.

#### Вопросы для построения подводящего диалога

1. О выражении с какими действиями идет речь в задаче? Что вы замечаете в этом выражении?
2. Последнюю цифру значения какого выражения можно найти, не вычисляя само значение?

#### Как проверить

Рассуждения о последней цифре можно проверить непосредственным вычислением значения выражения.

#### Основные задания

##### 1. Город мудрецов

На воротах города мудрецов написано выражение

$$21 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 51 \cdot 61 - 1$$

Главный Мудрец этого города утверждает, что, не вычисляя значения этого выражения, может объяснить, почему оно делится на 10. А ты сможешь?

#### Подсказка

Исследуй последние цифры множителей и произведения.

### Решение

Произведение чисел 21, 31, 41, 51 и 61 будет заканчиваться цифрой 1. Значит, значение выражения после вычитания единицы будет заканчиваться на 0, то есть делиться на 10.

### Запись на доске и в пособии

$$21 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 51 \cdot 61 = \dots 1$$

$$\dots 1 - 1 = \dots 0 \Rightarrow \text{Число делится на } 10.$$

## 2. Фокус

Задумай двузначное число. Прибавь к нему 7, а результат умножь на 3. После этого вычеркни последнюю цифру числа, а результат умножь на 20. В конце вычти из полученного результата 1. Ты получишь число, оканчивающееся на 9! В чем секрет фокуса?

### Подсказка

На итоговый ответ влияют только последние 2 действия.

### Решение

При умножении любого числа на 20 получается число, оканчивающееся нулем. А если из числа, оканчивающегося нулем, вычесть единицу, то получится число, оканчивающееся на 9.

### Запись на доске и в пособии

$$a \cdot 20 = \dots 0$$

$$\dots 0 - 1 = \dots 9$$

## 3. Волшебная цифра

Владик перемножил все числа от 11 до 29, а потом потерял тетрадку с вычислениями. Все, что он смог вспомнить, — это последняя цифра произведения. А какой была эта цифра?

### Подсказка

Умножение на какую цифру всегда дает ту же цифру?

### Решение

Среди чисел от 11 до 29 есть число 20, оканчивающееся нулем. Воспользуемся переместительным свойством умножения, и будем умножать 20 на 11, 12 и так далее. Последняя цифра такого произведения всегда будет нулем, значит, и произведение всех чисел будет оканчиваться нулем.

### Запись на доске и в пособии

$$11 \cdot 20 = \dots 0$$

При умножении на все остальные числа последняя цифра 0 не изменится.

**Ответ:** 0.

## 4. Раз, два, три, четыре, пять...

Не вычисляя сумму, определи ее последнюю цифру:

$$1 + 12 + 123 + 1234 + 12345 + 123456 + 1234567 + 12345678 + 123456789$$

### Подсказка

Вспомни метод упрощения вычислений «сложим первое с последним».

### Решение

Если сложить первое число с последним, то сумма будет заканчиваться на 0. То же самое будет с числами 12 и 12345678, 123 и 1234567, 1234 и 123456. Останется без пары только число 12345, значит, сумма будет заканчиваться на цифру 5.

**Запись на доске и в пособии**

$$1 + 12 + 123 + 1234 + 12345 + 123456 + 1234567 + 12345678 + 123456789$$

Суммы во всех парах заканчиваются на 0. Обведенное число заканчивается на 5  $\Rightarrow$  Последняя цифра суммы — 5.

**Ответ:** 5.

**5\*. Кондитерская задача**

В магазин привезли 206 шоколадок, которые надо разложить в подарочные коробки по 10 и 17 штук. Сколько коробок каждого вида понадобится?

**Подсказка**

Сколько может быть коробок по 17 штук, чтобы количество шоколадок заканчивалось на 6?

**Вопросы для построения подводящего диалога**

1. На какую цифру заканчивается число шоколадок в коробках по 10 штук?
2. На какую цифру тогда заканчивается число шоколадок в коробках по 17 штук?
3. На какую цифру заканчивается число коробок по 17 штук?
4. Какой может быть предпоследняя цифра этого числа?

**Решение**

Общее число шоколадок в коробках по 10 штук делится на 10, то есть заканчивается на 0. Тогда количество шоколадок в коробках по 17 штук должно заканчиваться на 6. В таблице умножения на 7 находим единственное подходящее число — это 8.

Тогда всего в коробках по 17 штук окажется  $17 \cdot 8 = 136$  шоколадок, а в коробках по 10 штук — оставшиеся  $206 - 136 = 70$  шоколадок. Таких коробок будет  $70 : 10 = 7$ .

**Запись на доске и в пособии**

$10 \cdot a = \dots 0$ , значит,  $17 \cdot b = \dots 6$ . По таблице умножения  $b = 8$ .

- 1)  $17 \cdot 8 = 136$  (шок.) — в коробках по 17 шт.
- 2)  $206 - 136 = 70$  (шок.) — в коробках по 10 шт.
- 3)  $70 : 10 = 7$  (кор.)

**Ответ:** 7 коробок по 10 шт. и 8 коробок по 17 шт.

**Замечание**

С сильной группой необходимо обсудить, почему не может быть других вариантов. Это можно объяснить, например, так. Если коробок по 17 шоколадок больше 8, то есть 18, 28, ..., то всего в этих коробках не менее  $17 \cdot 18 = 306$  шоколадок, а это больше, чем общее количество привезенных шоколадок. Значит, коробок по 17 шоколадок может быть только 8.

**Тренировочные задания**

**1т. Город мудрецов**

Оля пришла в гости к Главному Мудрецу из города мудрецов и принесла в подарок коробку мармеладов. Она рассказала ему про свой подарок: «Длина этой коробки 15 см, ширина 25 см, а высота 35 см. Поэтому ее объем равен тринадцати тысячам ста двадцати семи кубическим сантиметрам!» Однако мудрец почему-то ей не поверил. А ты догадываешься почему?

I ступень. Занятие 17. Последняя цифра

### Решение

Объем коробки можно вычислить по формуле:  $V = a \cdot b \cdot c$ .

Значения длины, ширины и высоты коробки заканчиваются на 5, значит, и их произведение заканчивается на 5, а не на 7, как утверждает Оля.

### Запись на доске и в пособии

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$15 \cdot 25 \cdot 35 = \dots 5 \text{ (см}^3\text{)} \neq 13\,127 \text{ (см}^3\text{)}.$$

### 2т. Фокус

Задумай двузначное число. Прибавь к нему 6, а полученную сумму умножь на 2. Результат действия умножь на 5. В конце вычти из результата 3. Ты получишь число, оканчивающееся на 7! В чем секрет фокуса?

### Решение

Умножить число на 2 и на 5 — это то же самое, что умножить число сразу на 10. При умножении на 10 получается число, оканчивающееся нулем. А если из числа, оканчивающегося нулем, вычтешь 3, то получится число, оканчивающееся на 7.

### Запись на доске и в пособии

$$a \cdot 2 \cdot 5 = a \cdot 10$$

Последняя цифра числа  $a \cdot 10$  — это 0.

$$\dots 0 - 3 = \dots 7$$

### 3т. Волшебная цифра

Катя, младшая сестра Владика, тоже решила перемножить все числа от 11 до 29, но без числа 20. К ее большому удивлению новое произведение опять заканчивалось на 0! Попробуй объяснить почему.

### Подсказка

Найди в этом ряду два числа, произведение которых заканчивается нулем.

### Решение

$12 \cdot 15 = \dots 0$ . При умножении на все остальные числа последняя цифра 0 не изменится.

### 4т. Раз, два, три, четыре, пять...

В верном примере на сложение Егор случайно стер одну цифру. Какая цифра была стерта?

$$17 + 29 + 36 + 44 + 51 + 63 + 78 + 82 + 9? = 490$$

### Решение

1-й способ

$$17 + 29 + 36 + 44 + 51 + 63 + 78 + 82 + 9? = 490$$

Разобьем числа на пары, запись суммы в которых заканчивается нулем:

Слева сумма всех чисел заканчивается на ?, а справа 490 — на 0. Значит, была стерта цифра 0.

2-й способ

В разряде единиц каждая цифра (кроме 0 и 5) встречается по одному разу, сумма единиц равна 40. В разряде десятков каждая цифра (кроме 0) встречается по одному разу, сумма десятков равна 45. Значит, сумма чисел без стертой цифры равна  $40 + 450 = 490$ , значит, стерли цифру 0.

I степень. Занятие 17. Последняя цифра

### Запись на доске и в пособии

1-й способ

Слева сумма всех чисел заканчивается на ?, а справа 490 — на 0. Значит, была стерта цифра 0.

2-й способ

В сумме слева 45 десятков и  $40 + ?$  единиц.

$450 + 40 + ? = 490$ , значит, стерли цифру 0.

**Ответ:** 0.

### 5т\*. Ребус

Вставь вместо звездочек цифры так, чтобы равенство было верным. Есть ли другие варианты?

$$20 \cdot * + 9 \cdot ** = 157.$$

#### Решение

$20 \cdot * = \dots 0$ , значит,  $9 \cdot ** = \dots 7$ . Наименьшее такое число — это 13.

1)  $9 \cdot 13 = 117$  — результат второго умножения

2)  $157 - 117 = 40$  — результат первого умножения

3)  $40 : 20 = 2$  — второй множитель первого произведения

$157 : 9 = 17$  (ост. 4), поэтому другие числа (23, 33, ...) не подходят.

**Ответ:**  $20 \cdot 2 + 9 \cdot 13 = 157$ ; других вариантов нет.

### Дополнительные задания

#### 6. Двухзначные числа

Старательная Надя вычислила сумму всех двухзначных чисел. Узнай, не считая всю сумму, какой цифрой она оканчивается.

#### Подсказка

Выясни, на какую цифру заканчивается сумма в каждом десятке.

#### Решение

1-й способ

В каждом десятке сумма чисел оканчивается на 5, так как в разряде единиц складываются 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Всего десятков 9, значит, сумма всех чисел будет оканчиваться как сумма девяти пятерок, то есть на 5.

2-й способ

Разобьем числа, кроме круглых, на пары с «круглой» суммой 110:  $11 + 99$ ,  $12 + 98$ , и так далее. При таком разбиении только числу 55 «не достанется» пары. Сумма всех круглых чисел (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90) оканчивается нулем, и сумма чисел во всех парах — тоже. Значит, сумма всех чисел будет оканчиваться на 5.

**Ответ:** 5.

## Сценарий занятия

### Метапредметные цели



1. Совершенствовать умение исполнять роли мыслителя (разведчик, навигатор, мастер) в процессе решения олимпиадных задач.



2. Тренировать умение применять изученные алгоритмы действий для решения олимпиадных задач.

3. Создать условия для развития у учащихся умения работать в паре.

© НОУ ДПО «Институт системно-деятельностной педагогики», [www.peterson.institute](http://www.peterson.institute)

## Опорные знания

1. Понятия число, цифра.
2. Деление с остатком.
3. Распределительное свойство деления относительно сложения.
4. Алгоритм сложения и вычитания многозначных чисел столбиком.<sup>1</sup>
5. Алгоритм умножения многозначного числа на однозначное (столбиком).<sup>2</sup>
- 6\*. Алгоритм умножения многозначного числа на двузначное столбиком.<sup>3</sup>
7. Формула объема прямоугольного параллелепипеда.<sup>4</sup>
8. Правило умножения и деления чисел на 10, 100, 1000 и т.д.<sup>5</sup>

## Материалы и оборудование

- На класс:**
- презентация;
  - эталоны «Правила работы в паре»<sup>6</sup>, «Учимся задавать вопросы»<sup>7</sup>, «Я — автор, я — понимающий»<sup>8</sup>.
- У ученика:**
- учебное пособие на печатной основе «Математический театр, 3 класс»<sup>9</sup>;
  - черновик, тетрадь;
  - планшетка.

### Методическая справка

На данном занятии продолжается работа по овладению учащимися ролями мыслителя при решении задач. Особое внимание уделяется ролям:

- **разведчика** при работе с текстом задачи, установлении связей между ее данными и требованием;
- **навигатора** для выбора среди изученных ранее алгоритмов действия необходимых для решения конкретной задачи;
- **мастера** при осуществлении решения задачи по выстроенному плану.

В ходе работы над задачей-ключ учащиеся приходят к выводу о том, что для решения олимпиадных задач необходимо иметь прочные знания и наработанные умения, быть готовым применить их в нестандартной ситуации, быть внимательным к каждому слову, верить в свои силы, смело высказывать предположения (*гипотезы*) и аргументированно, опираясь на математические правила и законы, доказывать их.

<sup>1</sup> Петерсон Л.Г. Математика: 3 класс: в 3 частях. Ч. 1. — М.: Бинوم. Лаборатория знаний, 2018. С.74.

<sup>2</sup> Петерсон Л.Г., Кубышева М.А. Построй свою математику: Блок-тетрадь эталонов для 3 класса по программе «Учусь учиться». — М.: Институт СДП, 2015. С. 25.

<sup>3</sup> Петерсон Л.Г., Кубышева М.А. Построй свою математику: Блок-тетрадь эталонов для 3 класса по программе «Учусь учиться». — М.: Институт СДП, 2015. С. 57.

<sup>4</sup> Петерсон Л.Г., Кубышева М.А. Построй свою математику: Блок-тетрадь эталонов для 3 класса по программе «Учусь учиться». — М.: Институт СДП, 2015. С. 51.

<sup>5</sup> Петерсон Л.Г., Кубышева М.А. Построй свою математику: Блок-тетрадь эталонов для 3 класса по программе «Учусь учиться». — М.: Институт СДП, 2015. С. 19, 21.

<sup>6</sup> Мир деятельности. Методические рекомендации к надпредметному курсу. 1 класс / Под ред. Л.Г. Петерсон. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. С.73–81.

<sup>7</sup> Данное пособие, 5\_Занятие 4 «Элементарно!».

<sup>8</sup> Данное пособие, 3\_Занятие 3 «Круглые задачи».

<sup>9</sup> Петерсон Л.Г. Математический театр: учебное пособие по олимпиадной математике для 3 класса. — Л.Г. Петерсон, О.Н. Агаханова. — М.: Институт СДП, 2021.

**Ход занятия**

1	2	3	4	5	6
Математическое фойе	Творческая мастерская	Сцена	Антракт	Выход на бис	Зеркало
25 мин	10 мин	25 мин	5 мин	10 мин	5 мин

**1. Математическое фойе (25 мин)**

С-3

– Ребята, умеете ли вы показывать фокусы? (Ответы детей.)

– Слышали ли вы что-нибудь о математических фокусах? (Ответы детей.)

– Хотите, я покажу вам один такой? (Ответы детей.)

С-4

– Пусть каждый из вас загадает какое-нибудь однозначное число. Запишите свое число в тетрадь (но никому не показывайте!). Затем умножьте число на 2 <пауза на вычисление и запись>. К результату прибавьте 8 <пауза на вычисление и запись>. Разделите полученное число на 2 <пауза на вычисление и запись>. А теперь вычитите то число, которое вы загадали изначально <пауза на вычисление и запись>. Я знаю, что у вас получилось — число 4. Правда? (Ответы детей.)

С-5

– Хотите разгадать секрет этого фокуса? (Да.)

▲ Учитель предлагает одному из учеников выйти к доске и записать выражение со своим числом, иллюстрирующее фокус. В это время остальные ученики выполняют аналогичные действия со своими числами в тетрадях.

С-6

Пусть, например, загадано число 7. Должно получиться выражение:

$$(7 \cdot 2 + 8) : 2 - 7.$$

– Попробуйте не вычислять значение выражения по действиям, а вместо этого использовать правило деления суммы на число.

С-7

▲ Ученик у доски записывает получающееся выражение. Остальные учащиеся выполняют действия в тетрадях со своими числами. Например, для семерки получается:

$$(7 \cdot 2 + 8) : 2 - 7 = 7 \cdot 2 : 2 + 8 : 2 - 7 = 7 + 4 - 7 = 4.$$

С-8

– Поднимите планшеты и покажите, какие значения у вас получились.

▲ Ученики сравнивают полученные результаты и по большинству представленных ответов приходят к выводу, что это число 4. Ученики с другим результатом вычисления быстро проверяют свои записи и самостоятельно исправляют ошибки.

– Кто уже догадался, почему ответ одинаковый при разных загаданных числах? (Потому что число сначала умножается на 2, потом делится на 2, а потом оно же и вычитается.)

– Почему получается именно 4? (Потому что мы прибавляем 8 и делим это слагаемое на 2.)

▲ Заменяя число 7 на переменную  $x$ , учитель демонстрирует получение общей записи:

С-9

$$(x \cdot 2 + 8) : 2 - x = \boxed{x \cdot 2 : 2} + 8 : 2 - \boxed{x} = (x - x) + 4 = 4$$

$x \leftarrow$

– Правильно, молодцы! Подумайте, будет ли работать этот фокус, если загадать не однозначное, а двузначное число? Почему? (Да. Значение выражения не зависит от загаданного числа.)

I ступень. Занятие 17. Последняя цифра

– Дома вы можете показать этот фокус своим близким. Сможете ли вы им объяснить, в чем его хитрость? (Да.)

– Замечательно. Интересно ли вам узнать другие фокусы с числами? (Ответы детей.)

– Например, бывают фокусы, связанные с последней цифрой числа. Но чтобы их узнать, вам нужно вспомнить некоторые известные свойства чисел и узнать новые.

C-10

– Посмотрите на число. Не выполняя деление, ответьте, каким числом — четным или нечетным — оно является и почему. (Число является четным, так как его последняя цифра четна<sup>10</sup>.)

12345678

Число четное, так как последняя цифра (8) — четная.

– Правильно. Теперь посмотрите на несколько чисел и ответьте, какие из них кратны 10. Обоснуйте свой ответ.

20, 37, 1230, 128, 111, 1000

C-11

▲ Школьники предлагают свои варианты ответа. Обоснование делимости чисел 20, 1230 и 1000 на 10 может строиться на эталоне «Правило умножения и деления на 10, 100, 1000 и т.д.»: эти числа можно поделить на 10, так как у каждого из них можно отбросить 0 справа.

Правило умножения и деления чисел на 10, 100, 1000 и т.д.

При умножении числа на 10, 100, 1000 и т. д. можно приписать к этому числу справа соответственно 1 ноль, 2 нуля, 3 нуля и т. д., а при делении — отбросить столько же нулей.

$$\square \cdot 10 = \square 0$$

$$\square \cdot 100 = \square 00$$

$$\square \cdot 1000 = \square 000$$

$$\square 0 : 10 = \square$$

$$\square 00 : 100 = \square$$

$$\square 000 : 1000 = \square \text{ и т.д.}$$

– Посмотрите на остальные числа. Как вы думаете, являются ли они кратными 10? Почему?

▲ Учащиеся предлагают варианты обоснования того, почему числа 37, 128 и 111 не кратны 10. Например, опираясь на тот же эталон можно сказать, что числа, кратные 10, равны произведению некоторого числа и 10, а значит их запись должна оканчиваться нулем.

▲ **Учителю на заметку.** Данный факт можно обосновать и по-другому. Рассмотрим «ближайшие» к 37, 128 и 111 числа, которые можно получить умножением на 10. Например, для числа 128 получаем:  $12 \cdot 10 = 120$  и  $13 \cdot 10 = 130$ . При умножении на 10 числа, меньшего или равного 12, получается число, меньшее или равное 120 (а значит меньшее 128), а при умножении числа, большего или равного 13 — большее или равное 130 (а значит большее 128). Таким образом, никакое целое число при умножении на 10 не может дать **ровно** 128, то есть 128 не кратно 10. (Случаи с другими числами рассматриваются аналогично).

**Обращаем внимание**, что недостаточно просто сказать, что нельзя подобрать целые числа, которые при умножении на 10 дают 37, 128 и 111. Это утверждение требует обоснования.

C-12

– Назовите остатки от деления чисел 37, 128 и 111 на 10. (7, 8, 1.)

– В чем секрет быстрого нахождения остатка от деления на 10? (Остаток равен последней цифре числа.)

C-13

▲ Учитель демонстрирует запись, иллюстрирующую связь последней цифры и остатка от деления на 10:

$$37 = 30 + 7 = 10 \cdot 3 + 7, \quad 128 = 120 + 8 = 10 \cdot 12 + 8, \quad 111 = 110 + 1 = 10 \cdot 11 + 1$$

– Правильно, получается, что при делении на 10 в остатке будет количество единиц числа. Вот таким интересным свойством обладает последняя цифра числа! Но это еще не все ее интересные свойства. Кстати, я обещал(а) вам показать еще один математический фокус. Пожалуйста! Я

C-14

<sup>10</sup> Актуализация материала урока 15\_Занятия 12\_Четность.

могу сказать, какой цифрой оканчивается сумма или произведение любых двух даже некруглых чисел. Назовите два любых некруглых числа.

▲ Дети называют два числа, сумму и произведение которых, как им кажется, быстро найти невозможно. Учитель же при необходимости для себя (не показывая детям) на планшете фиксирует только последние цифры чисел. И быстро говорит: «Сумма оканчивается на ... (называет цифру), произведение — на ... (называет цифру)».

**C-15** Скорость ответа учителя наверняка вызовет у детей удивление. Чтобы заинтересовать их еще больше, можно вызвать двух детей, которые будут проверять ответ учителя на калькуляторах: один на сложение, другой на умножение. Весь фокус в том, что пока дети набирают большие числа на калькуляторе, учитель, зная секрет фокуса, успевает раньше их дать ответ.

**Игровая интерпретация задачи-ключ (1 минута)**

**C-16** – Попробуйте разгадать секрет фокуса. Вы можете выполнять сложение или умножение, можете действовать с однозначными, двузначными или многозначными, но некруглыми числами, можете пользоваться эталонами умножения и сложения, — словом, все можно! Главное — открыть секрет!

▲ Дети работают индивидуально на том материале, который выбирают сами по своим силам.  
 ▲ **Учителю на заметку.** Расширение учителем рамок дозволенного: «Все можно», — с одной стороны, придает детям уверенность, что они обязательно справятся с поставленной задачей, с другой, позволяет в неявном виде предоставить известный эталон в качестве подсказки для решения задачи.

▲ Через 1 минуту учитель проводит опрос:

- C-17**
- Кому удалось разгадать секрет фокуса? (Ученики поднимают руки.)
  - Слушая рассказ «открывателя секрета», вы будете выполнять описываемые им действия. Зачем? Правильно, чтобы проверить, работает секрет или нет.
  - Кто считает, что открыл секрет фокуса на сложение? Расскажи, <Вася>, как ты рассуждал? (Я посмотрел на запись суммы чисел в столбик, рассмотрел разряд единиц (то есть последнюю цифру) суммы и заметил, что она равна последней цифре суммы цифр в разряде единиц слагаемых.)
  - <Вася>, сформулируй свой способ быстрого определения последней цифры суммы. (Сложить только цифры единиц данных чисел.)

**C-18** ▲ Ученикам, которые смогли разгадать секрет фокуса и рассказать его одноклассникам, присваивается титул «открывашки секретов», а учитель вместе с детьми обосновывает математическую составляющую фокуса, используя эталон сложения столбиком.



– Почему можно выполнить только действие с единицами и не выполнять операций с другими разрядами? Обоснуйте свой ответ, опираясь на эталон сложения в столбик. (Потому что нужно

I степень. Занятие 17. Последняя цифра

назвать только последнюю цифру суммы, а сложение в столбик начинается с единиц, то есть с последних цифр числа.)

C-19

– Проиллюстрируем Васины рассуждения с помощью записи действий в столбик. Вычислите две суммы:  $31 + 43$  и  $761 + 53$ , записав числа в столбик.

$$\begin{array}{r} + 31 \\ 43 \\ \hline 74 \end{array} \qquad \begin{array}{r} + 768 \\ 53 \\ \hline 821 \end{array}$$

– Заметим, что секрет фокуса будет работать и при сложении других (трех-, четырехзначных и т.д.) числах (п.2 эталона «Сложение трехзначных чисел»).

▲ После обращения к эталону и открытия «секрета» фокуса с последней цифрой суммы, ученикам легче открыть и понять секрет последней цифры произведения.

C-20

– Кто считает, что открыл секрет фокуса на умножение? Познакомьте нас с ним.

▲ Желаящие делятся своими гипотезами, остальные ученики проверяют их предложения на конкретных числах.

$$\begin{array}{r} \times \quad \cdot \cdot 7 \\ \quad \quad \quad 3 \\ \hline \cdot \cdot ? \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times \quad 123 \\ \quad \quad \quad 15 \\ \hline \cdot \cdot ? \\ + \\ \cdot \cdot \cdot \\ \hline \cdot \cdot \cdot ? \end{array}$$

Умножение чисел в столбик:  $24 \cdot 8$

Комментирование умножения чисел в столбик:  $24 \cdot 8$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 8 \\ \hline 192 \end{array}$$



Пишу: однозначное число под единицами двузначного.

Умножаю единицы:  $4 \cdot 8 = 32$ ; 2 единицы пишу под единицами, а 3 десятка запоминаю.

Умножаю десятки:  $2 \cdot 8 = 16$ ,  $16 + 3 = 19$  десятков; 9 десятков пишу под десятками, а 1 сотню – в разряде сотен.

Ответ: 192.

C-21

Если ученик (ученики) смог(ли) разгадать секрет фокуса на умножение и рассказать его одноклассникам, ему (им) также присваивается титул «открывашки секретов», а учитель обосновывает с детьми математическую составляющую фокуса, опираясь на эталон умножения столбиком на однозначное число (пункты 2, 3 алгоритма).

C-22

Если ученики пришли к выводу, что высказанные гипотезы не верны, учитель проводит разбор фокуса методом ролей. По завершению разбора ученики еще раз, фиксируют особенности, «фишки» задачи:

1. Нужно назвать *не все число* (сумму или произведение), а *только последнюю цифру* результата действия. Роль **фотографа**: внимательное прочтение текста задачи.
2. Для определения последней цифры в результате *достаточно* выполнить сложение (умножение) единиц и назвать последнюю цифру в полученном числе. Роль **навигатора**: владение эталонами, знание алгоритма действий.

Алгоритм умножения двузначного числа на однозначное в столбик

1. Записать однозначное число под разрядом единиц двузначного числа.
2. Умножить единицы.
3. Записать единицы под единицами, а десятки (если они есть) запомнить.
4. Умножить десятки; к результату прибавить десятки, которые запомнили.
5. Записать десятки под десятками, а сотни (если они есть) записать в разряд сотен.
6. Назвать ответ.

3. Быстрое и правильное выполнение указанного действия — гарантия успеха. Роль **мастера**: знание таблицы умножения, устных способов сложения чисел с переходом через разряд.

▲ **Учителю на заметку.** Будет полезным показать детям эталоны умножения на двузначное и трехзначное число, чтобы они могли сделать вывод о том, что открытый секрет «работает» при умножении любых многозначных чисел, так как алгоритм умножения в столбик, основано на правиле умножения суммы на число.

C-23

▲ После того, как секреты фокуса открыты, учитель предлагает детям самим стать «математическими фокусниками»: «Назовите моментально какой цифрой заканчивается сумма этих чисел. Последнюю цифру покажите на планшете».

Учитель на доске или на слайде показывает запись в строчку примера на сложение, используя многозначные числа. При этом просит кого-нибудь из учеников проверить ответ на калькуляторе. Обязательно следует похвалить учеников, если свой ответ они подняли быстрее произведенного на калькуляторе.

После этого учитель меняет в примере знак сложения на умножение и просит снова записать последнюю цифру, но уже произведения, а другого ученика произвести действия на калькуляторе.

– Понравилось вам быть фокусниками? Верхом мастерства у фокусника считается, если числа не записаны, а называются, то есть фокусник воспринимает их на слух. Потренируйтесь дома, проведите фокус с папой, мамой, старшими братьями, сестрами, ребятами из других классов. Узнайте, смогут ли они разгадать секрет вашего фокуса. А вы сами запомнили секреты последней цифры? Зафиксируйте их, дополнив записи на с. 78 пособия.

C-24

#### Свойства последних цифр чисел

1. Если число оканчивается на 0, то оно \_\_\_\_\_ на 10.
2. Остаток от деления числа на 10 равен \_\_\_\_\_ цифре этого числа.
3. Последнюю цифру суммы, разности и произведения чисел можно определить, выполнив соответствующие действия с \_\_\_\_\_ в записи этих чисел.

C-25

▲ Школьники заполняют пропуски, согласовывают вставки и проверяют работу по образцу на с. 107 пособия. Учитель демонстрирует образец на слайде:

#### Свойства последних цифр чисел

1. Если число оканчивается на 0, то оно **делится** на 10.
2. Остаток от деления числа на 10 равен **последней** цифре этого числа.
3. Последнюю цифру суммы, разности и произведения чисел можно определить, выполнив соответствующие действия с **последними цифрами** в записи этих чисел.

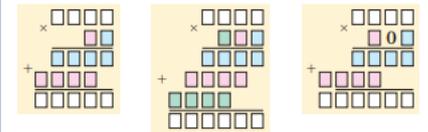
C-26

– Понравилось вам разгадывать секреты математических фокусов? (Ответы детей.)  
 – Как вы назовете тему сегодняшнего занятия? (Например: фокусы с числами, последние цифры, математика в цирке.)

#### Умножение многозначных чисел

##### Алгоритм умножения многозначного числа на двузначное и трёхзначное

1. Записать второй множитель под первым, разряд под разрядом.
2. Умножить первый множитель на единицы второго, результат записать разряд под разрядом.
3. Если цифра десятков второго множителя равна 0, перейти к пункту 4, а если нет, — умножить первый множитель на десятки второго, результат записать со сдвигом на один разряд влево.
4. Умножить первый множитель на сотни второго (если они есть), результат записать со сдвигом на два разряда влево.
5. Сложить полученные произведения.



C-27

– Все молодцы! Какую цель вы поставите на сегодняшнее занятие? (Например: научиться разгадывать другие математические фокусы.)

C-28



## 2. Творческая мастерская (10 мин)

Работая в группах, ученики стараются самостоятельно разгадать секрет своего математического фокуса.

Разгадав фокус, группа готовит *наглядный материал* — запись, позволяющую визуализировать «секрет» фокуса, чтобы «тайное стало явным» не только для членов группы, но и для зрителей на этапе «Сцена».

C-29

C-30



## 3. Сцена (25 мин)

На данном этапе группы представляют предложенные им для решения математические фокусы, используя метод ролей при необходимости, и объясняют остальным собравшимся открытые ими «секреты».

C-31-33

C-34-38

<p><b>1. Город мудрецов (4 мин)</b></p> <p>На воротах города мудрецов написано выражение:</p> $21 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 51 \cdot 61 - 1$ <p>Главный Мудрец этого города утверждает, что, не вычисляя значения этого выражения, может объяснить, почему оно делится на 10. А ты сможешь?</p>	<p><b>2. Фокус (4 мин)</b></p> <p>Задумай двузначное число. Прибавь к нему 7, а результат умножь на 3. После этого вычеркни последнюю цифру числа, а результат умножь на 20. В конце вычти из полученного результата 1. Ты получишь число, оканчивающееся на 9! В чем секрет фокуса?</p>
<p><b>3. Волшебная цифра (5 мин)</b></p> <p>Владик перемножил все числа от 11 до 29, а потом потерял тетрадку с вычислениями. Все, что он смог вспомнить, — это последняя цифра произведения. А какой была эта цифра?</p>	<p><b>4. Раз, два, три, четыре, пять... (5 мин)</b></p> <p>Не вычисляя сумму, определи ее последнюю цифру:</p> $1 + 12 + 123 + 1234 + 12345 + 123456 + 1234567 + 12345678 + 123456789$
<p><b>5*. Кондитерская задача (7 мин)</b></p> <p>В магазин привезли 206 шоколадок, которые надо разложить в подарочные коробки по 10 и 17 штук. Сколько коробок каждого вида понадобится?</p>	

C-39



## 4. Антракт (5 мин)

– На этапе «Математическое фойе» вы открыли свойства последней цифры суммы и произведения двух чисел. Для какого еще арифметического действия вы применяли аналогичное свойство, решая задачи, например, № 1 и № 2? (Для вычитания.)

– Как можно проиллюстрировать выполнение этого свойства? (Записав выражение в столбик.)

C-40

– Какие еще советы вы хотели бы дать себе для успешного решения задач о последних цифрах? (Для вычисления последней цифры разности двух чисел нужно из единиц уменьшаемого вычесть единицы вычитаемого. Если одно из двух слагаемых «круглое» число, то последняя цифра суммы равна последней цифре второго слагаемого. Если среди множителей есть «круглое» число, то запись произведения оканчивается нулём. Если перемножить два «круглых» числа, то запись произведения оканчивается двумя нулями.)

C-41



### 5. Выход на бис (10 мин)

Учитель организует самостоятельное решение детьми 1–2 тренировочных задач на с. 80–81 пособия по выбору. По истечении 5 минут ученики проверяют свои решения по подробным образцам на с. 140.

C-42-43

C-44



### 6. Зеркало (5 мин)

Учитель организует рефлексию работы учащихся на занятии. Результаты рефлексии ученики фиксируют в пособии.

C-45

– Какую цель вы сегодня ставили на занятии? Достигли ли вы этой цели?

– Какие роли вам помогли лучше понять решение задач? Кто хочет рассказать об этом?

C-46

– Какой совет себе самому вы хотите дать? Запишите в разделе «Выводы».

– С каким настроением вы сегодня решали задачи? Нарисуйте свое отражение в зеркале.

## Основные структурные элементы занятия

- Новое знание.** Свойство зависимости последней цифры в записи суммы и произведения двух чисел только от последних цифр в записи этих чисел.
- Пробное действие.** Задумайте два однозначных числа и найдите последнюю цифру в записи их суммы и произведения. Затем замените одно из них на двузначное и найдите последнюю цифру в записи их суммы и произведения. По возможности проделайте то же, заменив и второе число на двузначное. Сформулируйте правило нахождения последней цифры в записи результата суммы и произведения двух чисел.
- Возможные затруднения.** «Я не могу сформулировать правило нахождения последней цифры в записи результата сложения или произведения двух чисел»
- Фиксация причин затруднений.** «Я не знаю, как вычислить последнюю цифру в записи результата сложения и произведения двух чисел, не вычисляя значение выражения.»
- Цель деятельности.** Узнать правило вычисления последней цифры в записи результата сложения и произведения двух чисел, без вычисления значения выражения.
- Фиксация нового знания.** Последняя цифра суммы (произведения) двух чисел соответствует последней цифре в записи результата сложения (умножения) числа единиц этих чисел.

## Разбор ключевой задачи с помощью метода ролей

**Задача.** Задумайте два однозначных числа и найдите последнюю цифру в записи их суммы и произведения. Затем замените одно из них на некруглое двузначное и найдите последнюю цифру в записи их суммы и произведения. По возможности проделайте то же, заменив и второе число на некруглое двузначное. Сформулируйте правило нахождения последней цифры в записи результата суммы и произведения двух чисел.

Роль	Ключи	Исполнение роли учителем и учениками
ФОТОГРАФ 	КАРТИНКА	Передо мной пример на сложение (на умножение) двух некруглых чисел, однозначных или двузначных. Я хочу быстро узнать, какой будет последняя цифра этой суммы, не вычисляя саму сумму (произведение) чисел. Для этого я должен знать

		правило («секрет») нахождения последней цифры суммы или произведения любых двух некруглых чисел.
	УСЛОВИЕ, ВОПРОС (ТРЕБОВАНИЕ)	<p><b>Условия:</b></p> <p>1) два некруглых числа, однозначных или двузначных;</p> <p>2) выполняемые действия — сложение, умножение.</p> <p><b>Требование:</b></p> <p>сформулировать правило («секрет») нахождения последней цифры в записи результата суммы и произведения двух чисел.</p>
РАЗВЕДЧИК 	ВЗАИМОСВЯЗИ	<p>1) Чтобы сформулировать правило («секрет») нахождения последней цифры в записи результата суммы и произведения двух чисел, <b>не нужно</b> выполнять все действие, то есть вычислять результат, <b>необходимо и достаточно</b> вспомнить, как вычисляется последняя цифра в сумме и в произведении любых некруглых чисел.</p> <p>2) Последняя цифра числа — это цифра в разряде единиц этого числа.</p>
	ИДЕИ, ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ	Складывать и умножать многозначные числа удобно в столбик, однозначные — в строчку.
ПЕРЕВОДЧИК 	МОДЕЛЬ (известная или своя)	<p>Изобразим модели сложения и умножения возможных чисел. Обозначим цифру, которую нужно найти, и ее место в сумме и произведении.</p> <p><b>Суммы:</b></p> $\square + \square = \dots \boxed{c} \quad + \begin{array}{r} \square \square \\ \square \end{array} \quad + \begin{array}{r} \square \square \\ \square \square \end{array}$ $\begin{array}{r} \square \square \\ \square \square \\ \hline \square \boxed{c} \end{array} \quad \dots \begin{array}{r} \square \square \\ \square \square \\ \hline \square \boxed{c} \end{array}$ <p><b>Произведения:</b></p> $\square \times \square = \dots \boxed{c} \quad \times \begin{array}{r} \square \square \\ \square \end{array} \quad \times \begin{array}{r} \square \square \\ \square \square \end{array}$ $\begin{array}{r} \dots \square \square \\ \square \square \\ \hline \dots \square \boxed{c} \end{array} \quad + \begin{array}{r} \dots \square \square \\ \dots \square \square \\ \hline \dots \square \square \boxed{c} \end{array}$
НАВИГАТОР 	ПРАВИЛА, СВОЙСТВА, ПОДХОД	Будем использовать правила сложения и умножения чисел устно и в столбик. Необходимо вспомнить или подготовить эталоны с алгоритмами действий.
	ПЛАН РЕШЕНИЯ	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Вспомнить (или посмотреть в эталоне) алгоритм сложения чисел и определить, сложением каких цифр получается искомая цифра, показать на модели.</li> <li>2. Сделать (устно) вывод о получении последней цифры в сумме.</li> <li>3. Вспомнить (или посмотреть в эталоне) алгоритм умножения и определить, умножением каких цифр получается искомая цифра, показать на модели.</li> </ol>

		<p>4. Сделать (устно) вывод о получении последней цифры в произведении.</p> <p>5. Сравнить выводы 2 и 4, записать общее правило нахождения последней цифры в сумме (произведении) двух некруглых чисел.</p>
<p>МАСТЕР</p> 	<p>РЕШЕНИЕ, ОФОРМЛЕНИЕ</p>	<p><b>Сложение</b></p> <p>Сложение двух чисел начинается со сложения единиц. Обозначим переменной <math>a</math> число единиц в первом слагаемом, <math>b</math> — во втором. Вспомним шаг алгоритма: складываем единицы, результат записываем под единицами.</p> <p>Покажем на моделях: <math>a + b = c</math>.</p> <p><u>Вывод.</u> Заметим, что последняя цифра суммы (<math>c</math>) — это последняя цифра в результате сложения единиц (<math>a</math> и <math>b</math>).</p> $\boxed{a} + \boxed{b} = \dots \boxed{c} \quad + \begin{array}{r} \boxed{\phantom{a}} \boxed{a} \\ \boxed{\phantom{b}} \boxed{b} \\ \hline \boxed{\phantom{c}} \boxed{c} \end{array} \quad + \begin{array}{r} \boxed{\phantom{a}} \boxed{a} \\ \boxed{\phantom{b}} \boxed{b} \\ \hline \dots \boxed{\phantom{c}} \boxed{c} \end{array}$ <p><b>Умножение</b></p> <p>Умножение двух чисел начинается с умножения единиц. Обозначим переменными <math>a</math> и <math>b</math> число единиц в первом и втором множителях. Вспомним шаг алгоритма: умножаем единицы, результат записываем под единицами.</p> <p>Покажем на моделях: <math>a \cdot b = c</math>.</p> <p>Обратим внимание, что при умножении двузначного числа на двузначное число единиц в первом неполном произведении при сложении неполных произведений станет числом единиц всего произведения.</p> <p><u>Вывод.</u> Последняя цифра произведения (<math>c</math>) — это последняя цифра в результате умножения единиц (<math>a</math> и <math>b</math>).</p> $\boxed{a} + \boxed{b} = \dots \boxed{c} \quad + \begin{array}{r} \boxed{\phantom{a}} \boxed{a} \\ \boxed{\phantom{b}} \boxed{b} \\ \hline \boxed{\phantom{c}} \boxed{c} \end{array} \quad + \begin{array}{r} \boxed{\phantom{a}} \boxed{a} \\ \boxed{\phantom{b}} \boxed{b} \\ \hline \dots \boxed{\phantom{c}} \boxed{c} \end{array}$ $\boxed{a} \times \boxed{b} = \dots \boxed{c} \quad \times \begin{array}{r} \boxed{\phantom{a}} \boxed{a} \\ \boxed{\phantom{b}} \boxed{b} \\ \hline \dots \boxed{\phantom{c}} \boxed{c} \end{array} \quad \times \begin{array}{r} \boxed{\phantom{a}} \boxed{a} \\ \boxed{\phantom{b}} \boxed{b} \\ \hline \dots \boxed{\phantom{c}} \boxed{c} \\ + \dots \boxed{\phantom{c}} \boxed{c} \\ \hline \dots \boxed{\phantom{c}} \boxed{c} \end{array}$ <p>Сравним два вывода. Они похожи и отличаются только названием выполняемого действия и названием результата этого действия.</p> <p>Запишем общее <b>правило</b>. Последняя цифра произведения или суммы двух чисел (<math>c</math>) — это последняя цифра в результате умножения (сложения) единиц (<math>a</math> и <math>b</math>) этих чисел.</p>

<p>Эксперт</p> 	<p>ПРОВЕРКА РЕШЕНИЯ И ОТВЕТ</p>	<p>1) Проверим полученный вывод на конкретных числах. Рассмотрим не менее двух примеров на сложение чисел:</p> $\begin{array}{r} + \quad 1 \quad \textcircled{7} \\ \quad 2 \quad \textcircled{1} \\ \hline 3 \quad \textcircled{8} \end{array} \qquad \begin{array}{r} + \quad 9 \quad \textcircled{7} \\ \quad 2 \quad \textcircled{1} \\ \hline 1 \quad 1 \quad \textcircled{8} \end{array}$ <p>Заметим, что в этих примерах последняя цифра суммы действительно зависит только от последних цифр слагаемых.</p> <p><b>Вывод:</b> приведенные примеры не противоречат нашей гипотезе.</p> <p>2) Теперь рассмотрим два примера на умножение чисел*:</p> $\begin{array}{r} \times \quad 1 \quad \textcircled{2} \\ \quad 1 \quad \textcircled{6} \\ \hline 7 \quad \textcircled{2} \\ + \quad 1 \quad 2 \\ \hline 1 \quad 9 \quad \textcircled{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times \quad 3 \quad \textcircled{2} \\ \quad 1 \quad \textcircled{6} \\ \hline 1 \quad 9 \quad \textcircled{2} \\ + \quad 3 \quad 2 \\ \hline 5 \quad 1 \quad \textcircled{2} \end{array}$ <p>* Если ученики не изучали тему «Умножение многозначного числа на двузначное», пошаговая проверка ими осуществляется на умножении двузначного числа на однозначное. Проверку на двузначных числах учитель демонстрирует учащимся в готовом виде, фиксируя внимание на получение последней цифры в произведении.</p> <p>Видим, что последняя цифра произведения не меняется при изменении цифр в разрядах десятков, сотен, и т.д. множителей. Это происходит потому, что результаты умножения на десятки, сотни, и т.д. оканчивается нулем и не влияют на цифру в разряде единиц произведения.</p> <p><b>Вывод:</b> На случайно взятом примере правило для умножения сработало.</p>
	<p>ВЫВОДЫ</p>	<p><b>Общий вывод.</b> Последняя цифра в записи суммы (произведения) двух чисел равна последней цифре суммы (произведения) последних цифр в записи этих чисел.</p> <p><b>Возможные вопросы</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Что помогло вам <i>сформулировать</i> свой вариант правила о свойстве последней цифры суммы (произведения) двух чисел? (Знание алгоритмов действий.)</li> <li>– Что помогло вам <i>поверить</i> в то, что приведенные правила о свойстве последней цифры суммы (произведения) двух чисел работают? (Выполнение действий на конкретных числах.)</li> <li>– Можно ли обобщить полученное свойство на сумму и произведение большего количества чисел? (Да.)</li> </ul>