*Задача № 914 (7 класс, 3 часть, №769 в новом издании учебника):*

*«Определите, какой цифрой заканчивается число:*

*в)* *; г)* ?*»*

Это задание требует наблюдательности, умения видеть закономерности и обобщать их. Вычисления здесь потребуются минимальные, так как последняя цифра произведения зависит только от последних цифр сомножителей.

в)

Можно начать решение с наблюдения за последней цифрой нескольких первых произведений (ограничиваемся вычислением последней цифры произведения).

3599 ⋅ 3599 = …1

…1 ⋅ 3599 = …9

…9 ⋅ 3599 = …1

…1 ⋅ 3599 = …9

и т.д.

Исходя из наблюдения, можно сделать вывод – последние цифры в произведениях это 1 и 9, которые чередуются! Причем для четного числа множителей произведение будет оканчиваться 1, а для нечетного – 9.

Интересующая нас степень состоит из 678 таких множителей, значит, оканчивается на 1.

Теперь перейдем к вычислению «внешней» степени. Нам нужно число, оканчивающееся на 1, возвести в 131 степень. Здесь все просто, последняя цифра в записи такой степени будет 1, сколько бы таких множителей не было.

Используя свойство возведения степени в степень, мы получили бы задачу поиска последней цифры 3599 в степени 88818. Зная о чередовании 1 и 9 и используя четность показателя, мы пришли бы к такому же ответу.

*Ответ*: 1.

г) 

Пронаблюдаем за последней цифрой произведений, каждый множитель которых равен 12 (вычислять целиком произведения не нужно, достаточно ограничиться последней цифрой).

12 ⋅ 12 = …4

…4 ⋅ 12 = …8

…8 ⋅ 12 = …6

…6 ⋅ 12 = …2

и т.д.

Как мы видим, последние цифры разные: 4, 8, 6, 2. Но они повторяются. Можно это изобразить так:

12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ …….. ⋅ 12

4 8 6 2 4 8 6 2 …

Значит, каждое четвертое произведение будет опять давать двойку на конце. И любое произведение, состоящее из 4*n* + 1 множителей, каждый из которых оканчивается на 2, будет оканчиваться 2 (где *n* – натуральное число). Так как 91 = (4 ∙ 22 + 1) + 2 , то последней цифрой в произведении девяносто одного множителя, каждый из которых оканчивается двойкой, будет цифра 8.

Можно рассуждать иначе и перейти к рассмотрению ряда, составленного из последних цифр произведений. Запишем соответствующие последние цифры под каждым из сомножителем. Ясно, что количество чисел в таком ряду будет на один меньше, чем в исходном. Причем каждые четыре члена этого ряда будет повторяться: 4, 8, 6, 2. Так как 90 : 4 = 22 (ост. 2), то во вспомогательный ряд содержит 22 полные группы цифр и еще одну неполную: цифры 4 и 8. Опять приходим к выводу, что последней цифрой в произведении девяносто одного множителя, каждый из которых оканчивается двойкой, будет цифра 8.

12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ …….. ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12 ⋅ 12

4 8 6 2 4 8 6 2 . 4 8 6 2 4 8

Теперь перейдем к вычислению «внешней» степени. Нам нужно число, оканчивающееся на 8, возвести в 1991 степень. Пронаблюдаем за последними цифрами в произведениях:

…8 ⋅ …8 = …4

…4 ⋅ …8 = …2

…2 ⋅ …8 = …6

…6 ⋅ …8 = …8

и т.д.

Значит, каждое четвертое произведение будет опять давать восьмерку на конце. Так как 1991 = (4 ∙ 497 + 1) + 2 , то последней цифрой в произведении тысячи девятисот девяносто одного множителя, каждый из которых оканчивается восьмеркой, будет цифра 2.

Вспомогательный ряд будет выглядеть так:

4 2 6 8 4 2 6 8 … 4 2 6 8 4 2

Используя свойства степени, мы получили бы задачу поиска последней цифры степени 12 с показателем 181181. Зная о повторяющемся чередовании 4, 8, 6 и 2 и используя равенство 181181 = 4 ∙ 45295 + 1, бы пришли бы к такому же ответу.

*Ответ*: 2.